

NICHTPERIODISCHE FORTSETZBARKEIT VON WILLMORE-FLÄCHEN UNTER AXIALSYMMETRIE

An der Fakultät für Mathematik
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
zur Erlangung des akademischen Grades
Diplom-Mathematiker
angefertigte

Diplomarbeit

vorgelegt von
SASCHA EICHMANN
geboren am 01.12.1987 in Wolfenbüttel,
Studiengang Mathematik,
Studienrichtung Mathematik.

17. März 2014

Betreut am Institut für Analysis und Numerik von
PROF. DR. RER. NAT. HABIL. HANS-CHRISTOPH GRUNAU

An dieser Stelle möchte ich einigen besonderen Personen danken, ohne die mir diese Arbeit nicht gelungen wäre: Zuerst danke ich meinem Betreuer Professor Grunau für interessante Diskussionen rund um die Willmore-Flächen und dafür, dass er mir immer mit Rat und Tat zur Seite stand.

Nur mit der Unterstützung meiner Eltern und meiner Familie habe ich dieses Studium und insbesondere diese Arbeit bewältigen können und dafür möchte ich ihnen danken. Auch meine Freunde möchte ich hier erwähnen, denn ohne sie hätte alles nur halb so viel Spaß gemacht.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Geometrische Grundlagen	3
2.1	Extrinsische Geometrie von Flächen	3
2.2	Intrinsische Geometrie von Flächen	4
2.3	Kurven auf Riemannschen Flächen	6
2.4	Moebius-Geometrie	7
3	Axialsymmetrische Flächen und die hyperbolische Halbebene	10
3.1	Die Willmore-Energie im Vergleich zur elastischen Energie	10
3.2	Die hyperbolische Krümmung parametrisiert nach Bogenlänge	15
4	Analyse der Krümmungsgleichung	17
4.1	Anwendung der Energiemethode	18
4.2	Jacobische elliptische Funktionen	21
4.3	Lösungen der Krümmungsgleichung	23
5	Killing-Vektorfelder	28
6	Grundlagen zu Fortsetzungen der Lösungen der Willmore-Gleichung	35
6.1	Ein Killing-Vektorfeld entlang einer Lösung der Willmore-Gleichung	35
6.2	Moebius-Transformationen in \mathbb{H}^2	41
6.3	Kurven konstanter Krümmung in der hyperbolischen Halbebene	44
6.4	Nichtperiodische Fortsetzbarkeit der Lösung der Willmore-Gleichung	47
7	Globale Eigenschaften einer Willmore-Fläche unter Axialsymmetrie	49
7.1	Lösungen mit konstanter Krümmung	50
7.2	Wellenartige Lösungen	51
7.3	Orbitale Lösungen	56
7.4	Asymptotisch geodätische Lösung	60
8	Anhang	63
8.1	Plots wellenartiger Lösungen	63
8.2	Plots orbitaler Lösungen	70
	Literatur	81

1 Einleitung

Dem Willmore-Funktional wurde in den letzten Jahren einige Aufmerksamkeit zuteil. Dieses Funktional ist auf einer regulären Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ mit erster und zweiter Fundamentalform und der dazugehörigen mittleren Krümmung H definiert durch

$$W(S) := \int_S H^2 dA.$$

Die dazugehörige Euler-Lagrange-Gleichung wurde bereits von Thomsen in [T] hergeleitet:

$$\Delta_g H + 2H(H^2 - G) = 0 \quad \text{auf } S. \quad (\text{Willmore})$$

Hierbei ist Δ_g der Laplace-Beltrami-Operator und G die Gauß-Krümmung der Fläche S . Eine Lösung S dieser Gleichung heißt Willmore-Fläche.

Das Interesse an diesem mathematischen Objekt rührt in erster Linie daher, dass $W(\cdot)$ ein einfaches differentialgeometrisches Funktional ist, welches dennoch eine höhere Komplexität als das Flächenfunktional aufweist. Außerdem dient es als Modell für nichtlineare elliptische Differentialgleichungen vierter Ordnung, denn in diesem Kontext können bewährte Techniken wie das Maximumprinzip nicht angewandt werden. Die Nichtlinearität rührt daher, dass der Laplace-Beltrami-Operator abhängig von der gesuchten Fläche S ist. Eine weitere Schwierigkeit entsteht aus der Invarianz des Funktionals gegenüber inneren Variationen und konformen Transformationen (siehe [E]), sodass Methoden der Variationsrechnung nicht direkt angewandt werden können. Neben dem innermathematischen Interesse existieren auch Anwendungen. Das Funktional dient zum Beispiel der Modellierung der elastischen Energie dünner Membranen (vergleiche [OY] und [H]) und findet ebenfalls Interesse in der Bildrestauration (siehe [DR]).

In diesen Anwendungen werden üblicherweise Minima des Willmore-Funktional unter bestimmten Bedingungen wie Randdaten gesucht. Nitsche diskutierte zuerst mögliche Randdaten in [N] und bewies Existenzresultate unter nicht-expliziten Kleinheitsbedingungen. Schätzle zeigte später die Existenz von Lösungen in der \mathbb{S}^n unter Randdaten (siehe [S]), allerdings kann der Punkt ∞ beim Zurückziehen in den \mathbb{R}^n für eine Lösung nicht ausgeschlossen werden.

In dieser Arbeit werden Willmore-Flächen unter Axialsymmetrie untersucht. Dabei wird die Fläche durch eine glatte Profilkurve

$$u : [-1, 1] \rightarrow (0, \infty)$$

mithilfe der Parametrisierung

$$(x, \varphi) \rightarrow f(x, \varphi) = (x, u(x) \cos \varphi, u(x) \sin \varphi), \quad x \in [-1, 1], \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

beschrieben.

Weitreichende Existenzresultate für dieses Problem unter Randdaten können in den Arbeiten [BDF1], [BDF2], [DFGS] und [DDG] nachgelesen werden. Hier ist dabei folgendes Resultat von besonderem Interesse:

1.1 Satz (siehe Theorem 1.1 in [DDG])

Für jedes $\alpha > 0$ existiert eine glatte Funktion $u \in C^\infty([-1, 1], (0, \infty))$, sodass die zugehörige axialsymmetrische Fläche $S(u)$ das Dirichlet Problem für die Willmore-Gleichung

$$\begin{cases} \Delta_g H + 2H(H^2 - K) = 0 \\ u(\pm 1) = \alpha, \quad u'(\pm 1) = 0 \end{cases}$$

erfüllt.

Diese Lösung u ist gerade und besitzt zusätzlich folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}\forall x \in [0, 1] : & \quad 0 \leq x + u(x)u'(x), & \quad u'(x) \leq 0. \\ \forall x \in [-1, 1] : & \quad \alpha \leq u(x) \leq \alpha + 1, & \quad |u'(x)| \leq \frac{1}{\alpha}.\end{aligned}$$

Diese Lösung nimmt unter allen axialsymmetrischen Flächen $S(v)$, welche von geraden Funktionen $v \in C^{1,1}([-1, 1], (0, \infty))$ und $v(x) = v(-x)$ erzeugt werden, die die Dirichlet Randbedingungen $v(\pm 1) = \alpha$ und $v'(\pm 1) = 0$ erfüllen, das Minimum der Willmore-Energie an. Insbesondere gilt

$$W(S(u)) < 4\pi.$$

Die Profilkurve u kann als Lösung der dahinterliegenden gewöhnlichen Differentialgleichung als Anfangswertproblem über das Intervall $[-1, 1]$ hinaus fortgesetzt werden. Der Hauptteil der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich damit, dass es nicht möglich ist eine periodische Profilkurve zu finden, dessen axialsymmetrische Fläche die Willmore-Gleichung erfüllt:

1.2 Hauptsatz

Sei $u \in C^\infty([-1, 1], (0, \infty))$ und $S(u)$ die dazugehörige axialsymmetrische Fläche von u , welche die Willmore-Gleichung (Willmore) erfüllt. Dann ist es **nicht** möglich, dass diese Profilkurve periodisch auf \mathbb{R} fortgesetzt werden kann und gleichzeitig die zugehörige axialsymmetrische Fläche die Willmore-Gleichung

$$\Delta_g H + 2H(H^2 - G) = 0 \text{ auf } \mathbb{R}$$

erfüllt.

Für den Beweis dieses Resultates wird das Problem in Paragraph 3 zuerst in die hyperbolische Halbebene transformiert (siehe [LS2] und [HJP]), indem die Profilkurve u als Kurve in dieser Mannigfaltigkeit interpretiert wird. Eine Umparametrisierung nach Bogenlänge liefert dann eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die geodätische Krümmung der Profilkurve (siehe auch [LS1]), welche in Abschnitt 4 mithilfe Jacobisch elliptischer Funktionen untersucht und gelöst wird. In Paragraph 6.1 wird dann ein Killing-Vektorfeld in der hyperbolische Halbebene konstruiert, mit dessen Hilfe in Abschnitt 6.4 der Beweis des Satzes 1.2 geführt wird, indem Schranken für das angesprochene Killing-Vektorfeld gefunden werden. Diese Schranken sind dabei verantwortlich dafür, dass keine periodischen Lösungen der Willmore-Gleichung existieren.

Abschnitt 2 dient hier als Zusammenfassung von allgemein bekannten Sätzen und Definitionen der Differentialgeometrie, während in Paragraph 5 basierend auf [L] Killing-Vektorfelder eingeführt und einige nützliche Tatsachen als Vorbereitung in diesem Zusammenhang bewiesen werden.

Ein großer Teil der Ergebnisse aus den Abschnitten 4 und 6.1 stammen dabei aus [LS1], welche für diese Arbeit von zentraler Rolle sind. Diese Ergebnisse wurden allerdings in [LS1] für die Vorkenntnisse des Autors des hier vorliegenden Werkes unzureichend erklärt und mussten unter größerem Aufwand selbst erarbeitet werden. Dies resultiert darin, dass die benötigten Ergebnisse aus [LS1] hier im Detail bewiesen werden.

In Paragraph 7 wird die Technik für den Beweis von 1.2 vom hiesigen Autor verfeinert, um so explizite Grenzen für die fortgesetzte Lösung in Abhängigkeit von Anfangsdaten zu erhalten. Ergänzend dazu befinden sich im Anhang (siehe Abschnitt 8) diverse Plots dieser Lösungen, damit der Leser sich einen Eindruck von ihrer Gestalt verschaffen kann.

2 Geometrische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden einige für diese Arbeit wichtige Resultate, Formeln und Definitionen aus der Differentialgeometrie und der Moebius-Geometrie gesammelt. Die Resultate der Differentialgeometrie in den ersten drei Unterkapiteln stammen dabei aus [B], während der Unterabschnitt 2.4 auf Kapitel 4 von [R] basiert. Die jeweiligen Details können in den dortigen Quellen nachgelesen werden.

2.1 Extrinsische Geometrie von Flächen

2.1 Definition (metrischer Tensor, siehe [B] Seite 111)

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt des \mathbb{R}^3 . Sei weiterhin $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $p \in S$ und F eine Karte bezüglich S in p . Dann heißt

$$g_{ij} := \left\langle \frac{\partial F}{\partial x^i}, \frac{\partial F}{\partial x^j} \right\rangle$$

metrischer Tensor oder erste Fundamentalform in lokalen Koordinaten.

Mit g^{ij} wird hier das Inverse von g_{ij} bezüglich Matrixmultiplikation bezeichnet.

2.2 Definition (siehe [B] Definition 3.2.6)

Seien $S, S' \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen, sowie $f : S \rightarrow S'$ glatt. Dann wird das Differential $df(p) : T_p S \rightarrow T_{f(p)} S'$ von f in $p \in S$ durch folgende Konstruktion definiert: Sei $V \in T_p S$ und $c(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ eine Kurve mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = V$. Dann setzt man

$$df(p)(V) := \left. \frac{d}{dt} f(c(t)) \right|_{t=0}.$$

2.3 Definition (siehe [B] Definition 3.4.1)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Falls eine glatte Abbildung $\nu : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ existiert, nennt man S orientierbar und die Abbildung ν Gauß-Abbildung.

2.4 Definition (siehe [B] Definition 3.5.1)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit Gauß-Abbildung ν . Dann heißt für $p \in S$

$$\begin{aligned} W_p : T_p S &\rightarrow T_{\nu(p)} \mathbb{S}^2 \\ V &\mapsto -d\nu(p)(V) \end{aligned}$$

Weingarten-Abbildung von S .

2.5 Definition (siehe [B] Formel 3.4)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit Gauß-Abbildung ν sowie Karte F und sei $p \in S$. Dann heißt

$$h_{ij} := \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}, \nu \circ F \right\rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x^i}, W_p \left(\frac{\partial F}{\partial x^j} \right) \right\rangle$$

zweite Fundamentalform von S in lokalen Koordinaten. Hierbei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt des \mathbb{R}^3 .

2.6 Definition (mittlere Krümmung, siehe [B] Definition 3.6.9)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit Karte F bezüglich $p \in S$ mit erster und zweiter Fundamentalform. Dann heißt

$$H(p) := \frac{g_{11}h_{22} - 2g_{12}h_{12} + g_{22}h_{22}}{2(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)} = \frac{1}{2} \text{Spur}(((g^{ik}) \circ (h_{ik}))_{i,k=1,2}) = \frac{1}{2} \text{Spur}(W_p)$$

mittlere Krümmung von S . $(g^{ik})_{i,k=1,2}$ ist dabei der inverse metrische Tensor.

2.7 Definition (Gauß-Krümmung, siehe [B] Definition 3.6.9)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit erster und zweiter Fundamentalform, gegeben durch eine Karte F bezüglich $p \in S$. Dann heißt

$$G(p) := \frac{h_{11}h_{22} - (h_{12})^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = \det(W_p)$$

Gauß-Krümmung von S .

2.2 Intrinsische Geometrie von Flächen

2.8 Definition (siehe [B], Definition 4.4.1)

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Dann heißt die Abbildung, die allen $p \in M$ ein Skalarprodukt $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Tangentialraum von M zuordnet, Riemannsche Metrik, falls für alle Karten $F : U \rightarrow M$ von M gilt, dass die Abbildungen

$$g_{ij}(x) := g_{F(x)} \left(\frac{\partial F}{\partial x^i}, \frac{\partial F}{\partial x^j} \right), x \in U \subset \mathbb{R}^2, \quad i, j = 1, 2$$

glatt in x sind. $(g_{ij})_{i,j=1,2}$ heißt metrischer Tensor. Das Paar (M, g) nennt man dabei Riemannsche Fläche.

2.9 Definition (Christoffelsymbol, siehe [B] Definition 4.2.13)

Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche. Dann definiert man in lokalen Koordinaten das Christoffelsymbol

$$\Gamma_{ij}^k := \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^2 g^{k\ell} \left(\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} \right),$$

wobei $(g^{k\ell})_{k,\ell=1,2}$ das Inverse des metrischen Tensors $(g_{ij})_{i,j=1,2}$ ist.

2.10 Definition (kovariante Ableitung, siehe [B] Seite 185)

Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche und sei V ein glattes Tangentialvektorfeld auf M , d.h. $\forall p \in M$ gilt $V(p) \in T_p M$. Sei nun $p \in M$ fixiert und F eine Karte von M in p . Sei weiterhin $W \in T_p M$ und $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eine glatte Kurve mit $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = W$ und $\varepsilon > 0$. Sei weiterhin $\tilde{c} := F^{-1} \circ c$ die Kurve in lokalen Koordinaten. Dann wird die kovariante Ableitung von V nach W in p durch

$$\nabla_W V := \sum_{k=1}^2 \left((V \dot{\circ} \tilde{c})^k + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(\tilde{c}(0)) V^i \dot{\tilde{c}}(0)^j \right) \frac{\partial F}{\partial x^k}$$

definiert.

2.11 Bemerkung

Die Definition der kovarianten Ableitung, siehe 2.10, liegt zwar in lokalen Koordinaten vor, allerdings kann gezeigt werden, dass diese wohldefiniert ist (siehe [J] Seite 105).

2.12 Hilfssatz (siehe [B] Seite 185)

In lokalen Koordinaten kann die kovariante Ableitung auch ohne eine Hilfskurve angegeben werden. Dafür gelten hier die gleichen Bezeichnungen wie in 2.10. Dann gilt

$$(\nabla_W V)^i = \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial V^i}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^2 \Gamma_{kj}^i V^k \right) W^j.$$

2.13 Hilfssatz (siehe [B] Lemma 4.2.12)

Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche, $c : I \rightarrow M$ eine glatte Kurve auf M mit $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, J ein weiteres Intervall in \mathbb{R} mit $\varphi : J \rightarrow I$ eine Umparametrisierung von c , V, W, Z glatte Tangentialvektorfelder auf M und $f, h : M \rightarrow \mathbb{R}$ glatte Funktionen auf M . Seien weiterhin $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $p \in M$ und $\tilde{c} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eine glatte Kurve mit $\tilde{c}(0) = p$ sowie $\dot{\tilde{c}}(0) = Z(p)$. Dann gelten folgende Formeln für die kovariante Ableitung:

- Linearität erster Teil:

$$\nabla_Z(\alpha V + \beta W) = \alpha \nabla_Z V + \beta \nabla_Z W$$

- Produktregel erster Teil in $p \in M$:

$$\nabla_{Z(p)} f V = \left. \frac{d}{dt} f(\tilde{c}(t)) \right|_{t=0} V + f \nabla_Z V$$

- Produktregel zweiter Teil:

$$\frac{d}{dt} g_{c(t)}(V, W) = g_{c(t)}(\nabla_{\dot{c}(t)} V, W) + g_{c(t)}(V, \nabla_{\dot{c}(t)} W)$$

- Kettenregel:

$$\nabla_{c \circ \varphi} V(c \circ \varphi) = \dot{\varphi}(\nabla_{\dot{c}} V) \circ \varphi$$

- Linearität zweiter Teil:

$$\nabla_{fV+hW} Z = f \nabla_V Z + h \nabla_W Z$$

2.14 Definition (siehe [B] Definition 4.3.1)

Seien V, W, Z glatte Tangentialvektorfelder auf einer Riemannschen Fläche (M, g) . Dann wird die zweifache kovariante Ableitung durch

$$\nabla_{V,W}^2 Z := \nabla_V(\nabla_W Z) - \nabla_{\nabla_V W} Z$$

definiert.

2.15 Definition (siehe [B] Definition 4.3.4)

Seien V, W, Z glatte Tangentialvektorfelder auf einer Riemannschen Fläche (M, g) . Dann wird der Riemannsche Krümmungstensor durch

$$R(V, W)Z := \nabla_{V,W}^2 Z - \nabla_{W,V}^2 Z$$

definiert.

2.16 Hilfssatz (siehe [B] Tabelle 1)

Der Riemannsche Krümmungstensor besitzt folgende Darstellung in lokalen Koordinaten:

$$R_{ijk}^\ell = \frac{\partial \Gamma_{kj}^\ell}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^\ell}{\partial x^j} + \sum_m (\Gamma_{mi}^\ell \Gamma_{kj}^m - \Gamma_{mj}^\ell \Gamma_{ki}^m).$$

2.17 Definition (siehe [B] Tabelle 1)

Die Gauß-Krümmung G auf einer Riemannschen Fläche (M, g) wird in Koordinaten durch

$$G = \frac{1}{2} \sum_{j,k} g^{jk} \left(\sum_\ell R_{\ell jk}^\ell \right)$$

erklärt.

2.18 Bemerkung

Das Theorema Egregium (siehe [B] Satz 4.3.8 und Tabelle 1, Seite 183) zeigt, dass die extrinsische Definition 2.7 der Gauß-Krümmung mit 2.17 für den Fall übereinstimmt, dass die Metrik durch den ambienten Raum \mathbb{R}^3 induziert wird.

Folgendes Resultat ist nur für 2-dimensionale Flächen korrekt und besitzt keine entsprechende Verallgemeinerung in höheren Dimensionen.

2.19 Satz (siehe [B] Lemma 4.3.11)

Sei (M, g) eine 2-dimensionale Riemannsche Fläche und $G : M \rightarrow \mathbb{R}$ die Gauß-Krümmung auf M . Seien weiterhin V, W, Z glatte Tangentialvektorfelder auf (M, g) . Dann gilt für den Riemannschen Krümmungstensor

$$\begin{aligned} R_{ijl}^k &= G (g_{j\ell} \delta_i^k - g_{i\ell} \delta_j^k) \\ R(V, W)Z &= G (g(Z, W)V - g(Z, V)W) \end{aligned}$$

2.20 Satz (Riemannsche Normalkoordinaten, siehe [B] Satz 4.6.7)

Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche und $p \in M$. Dann existiert eine Karte von M um p , sodass für den metrischen Tensor in p gilt:

- $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$
- $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(p) = 0$, $i, j, k = 1, 2$.

2.3 Kurven auf Riemannschen Flächen

2.21 Definition (siehe [B] Definition 2.1.1)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, (M, g) eine Riemannsche Fläche und $c : I \rightarrow M$ eine glatte Kurve. Diese wird als regulär bezeichnet genau dann, wenn $\forall t \in I \dot{c}(t) \neq 0$.

2.22 Definition (geodätische Krümmung, siehe [B] Definition 4.5.14)

Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $c : I \rightarrow M$ eine glatte, reguläre Kurve. Sei weiterhin N ein glattes Vektorfeld an c mit $N(t) \in T_{c(t)}M$, $g_{c(t)}(N(t), N(t)) = 1$, $\forall t \in I$ und $g_{c(t)}(\dot{c}(t), N(t)) = 0$. Dann wird die geodätische Krümmung κ von c durch

$$\kappa(t) := \frac{g_{c(t)}(\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t), N(t))}{g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}$$

definiert.

2.23 Bemerkung

Die Definition der geodätischen Krümmung in 2.22 ist gegenüber richtungserhaltenden Umparametrisierungen invariant. Wird die Laufrichtung der Kurve jedoch umgekehrt, ändert dies lediglich das Vorzeichen der geodätischen Krümmung (vergleiche 2.13). Außerdem ändert ein umgekehrtes Vorzeichen für die Normale ebenfalls nur das Vorzeichen der geodätischen Krümmung.

2.24 Definition (siehe [B] Proposition 2.1.13)

Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche und $c : (0, L) \rightarrow M$ eine glatte, reguläre Kurve. Diese ist nach der Bogenlänge parametrisiert genau dann, wenn für das Längenfunktional folgende Bedingung gilt

$$\forall t \in (0, L) : L_{(0,t)}(c) := \int_0^t \sqrt{g_{c(s)}(\dot{c}(s), \dot{c}(s))} ds = t.$$

2.25 Hilfssatz (siehe [B] Definition 2.1.11)

Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $c : I \rightarrow M$ eine glatte, reguläre Kurve. Dann gilt, dass c nach der Bogenlänge parametrisiert ist genau dann, wenn

$$\forall t \in I : g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 1.$$

2.26 Satz (siehe [B] Proposition 2.1.13)

Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $c : I \rightarrow M$ eine glatte, reguläre Kurve. Dann existiert eine richtungserhaltende Umparametrisierung $\varphi : J \rightarrow I$ von c , sodass $c \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

2.27 Satz (Frenet-Gleichungen, siehe [B] Aufgabe 4.24)

Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche, $t_0, t_1 > 0$, $c : [t_0, t_1] \rightarrow M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Einheitsnormalenvektorfeld N bezüglich g entlang c wie in Definition 2.22 und $\kappa : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ die dazugehörige geodätische Krümmung von c . Dann gelten für diese Kurve die Frenet Gleichungen:

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = \kappa \cdot N \text{ und } \nabla_{\dot{c}} N = -\kappa \cdot \dot{c}.$$

Sei umgekehrt eine glatte Funktion $\kappa : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Dann existiert zu jedem Punkt $p \in M$ und Einheitsvektor $V \in T_p M$ bezüglich g eine eindeutige Kurve $c : [t_0, t_1] \rightarrow M$, welche die Frenet Gleichungen mit geodätischer Krümmung κ erfüllt, nach der Bogenlänge parametrisiert ist und die Anfangsbedingung $c(t_0) = p$ und $\dot{c}(t_0) = V$ erfüllt.

2.4 Moebius-Geometrie

In diesem Abschnitt werden Grundlagen zu Moebius-Transformationen des \mathbb{R}^n eingeführt. Diese werden später in Paragraph 7 benötigt um sich für die dortigen Diskussionen auf einen Spezialfall zurückziehen zu können.

Sei dafür in diesem Abschnitt $n \in \mathbb{N}$ die Dimension des euklidischen \mathbb{R}^n und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt des \mathbb{R}^n .

2.28 Definition (Inversion, siehe [R] Gleichungen (4.1.1) und (4.1.2))

- i) Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $|a| = 1$, $t \in \mathbb{R}$, $P(a, t) := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = t\}$ eine Ebene. Sei weiterhin $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\rho(x) = x + 2(t - \langle a, x \rangle)a.$$

ρ heißt Inversion an der Ebene $P(a, t)$.

- ii) Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^+$. Sei $\sigma : \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\sigma(x) = a + \left(\frac{r}{|x - a|} \right)^2 (x - a)$$

σ heißt dann Inversion an der Sphäre $S_r(p) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - p| = r\}$.

2.29 Bemerkung

Erweitert man den \mathbb{R}^n um den Punkt ∞ , können Inversionen an Sphären o.B.d.A. auch auf ganz $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ betrachtet werden, indem ∞ auf den Mittelpunkt der Sphäre und andersherum abgebildet werden. Bei Spiegelungen an Ebenen wiederum wird ∞ auf ∞ abgebildet.

2.30 Definition (siehe [R] Seite 116)

Eine Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ heißt Moebius-Transformation, wenn diese eine endliche Komposition von Inversionen an Sphären und/oder Ebenen ist.

2.31 Beispiel

Jede Translation in \mathbb{R}^n ist eine Moebius-Transformation.

Beweis. Sei eine Translation $\Phi(x) = x + a$ mit $a \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann kann diese Transformation geschrieben werden als eine Komposition von zwei Inversionen an Ebenen. Dafür sei $b := \frac{a}{|a|}$ und $t := -\frac{|a|}{4}$. Die erste Inversion findet an $P(b, t)$ und die zweite Inversion an $P(b, -t)$ statt. Dann berechnet sich die Komposition $\tilde{\Phi}$ der Inversionen zu:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(x) &= x + 2(t - \langle b, x \rangle)b + 2(-t - \langle b, x + 2(t - \langle b, x \rangle)b \rangle)b \\ &= x - 4\langle b, x \rangle b - 4b|b|^2(t - \langle b, x \rangle) = x - 4tb = x + a = \Phi(x). \end{aligned}$$

□

2.32 Definition (Poincaré-Fortsetzung, siehe [R] Seite 121)

Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ eine Moebius-Transformation. Dann existieren Inversionen ϕ_1, \dots, ϕ_m von \mathbb{R}^n , sodass $\Phi = \phi_1 \circ \dots \circ \phi_m$. Φ wird dann durch folgende Konstruktion auf den \mathbb{R}^{n+1} fortgesetzt:

Falls ϕ_j eine Inversion an einer Sphäre $S_r(a)$ mit $a \in \mathbb{R}^n$ ist, dann wird diese Abbildung durch $\tilde{\phi}_j$ fortgesetzt, indem diese als Inversion an $S_r((a, 0))$ gesetzt wird. Dabei ist $(a, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Analog wird eine Inversion an einer Ebene fortgesetzt. Nun wird die Fortsetzung der Moebius Transformation durch $\tilde{\Phi} = \tilde{\phi}_1 \circ \dots \circ \tilde{\phi}_m$ erklärt. Diese nennt man Poincaré-Fortsetzung.

2.33 Bemerkung

Die Definition der Poincaré-Fortsetzung ist wohldefiniert, allerdings liegt der Nachweis dafür in tieferen Argumenten der Moebius-Geometrie. Hier wird deshalb nur eine kurze Beweisskizze gegeben, dessen Details in [R] Kapitel 4 Seite 121 und Theorem 4.3.6 liegen:

Beweisskizze. Sei Φ also durch zwei Zerlegungen in Inversionen gegeben. Sei Φ_1 die Poincaré-Fortsetzung der ersten Zerlegung und Φ_2 die Poincaré-Fortsetzung der zweiten Fortsetzung. Dann ist $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$ die Identität auf $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. Dies impliziert, dass $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}(\infty) = \infty$ und damit ist diese Abbildung eine Skalierung des euklidischen Abstandes, d.h.

$$\exists K > 0 : \forall p, q \in \mathbb{R}^{n+1} \quad |\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}(p) - \Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}(q)| = K|p - q|.$$

Dieser Schritt liegt dabei tiefer in der Moebius-Geometrie und man benötigt dafür weitere Theorie. Nun sind solche Skalierungen durch das Bild der Einheitsvektoren bereits festgelegt und für diese gilt $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}(e_j) = e_j$, $j = 1, \dots, n + 1$, da eine Poincaré-Fortsetzung die obere Halbebene $\mathbb{H}^{n+1} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > 0\}$ per Konstruktion invariant lässt. Damit folgt, dass $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1} = \text{id}$. \square

Folgender Satz erklärt, weshalb Moebius-Transformationen so wichtig für den Kontext der Willmore-Energie sind. Dieser wird hier allerdings nicht bewiesen, denn dafür würde weitere Theorie für Moebius-Transformationen und aus der Differentialgeometrie benötigt, die für den Hauptteil dieser Arbeit allerdings keine Rolle spielen.

2.34 Satz (siehe [E] Proposition 1.1)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und sei Φ eine Moebius-Transformation des \mathbb{R}^3 . Dann gilt für das konforme Willmore-Funktional $W_k(S) = \int_S H^2 - G \, dA$

$$W_k(\Phi(S)) = W_k(S).$$

Hier ist dabei H die mittlere Krümmung und G die Gauß-Krümmung von S .

3 Axialsymmetrische Flächen und die hyperbolische Halbebene

Ziel dieses Abschnittes ist es, das Dirichlet-Problem aus Satz 1.1 in die hyperbolische Halbebene zu übertragen, indem die Willmore-Energie mit der elastischen Energie einer Kurve verglichen wird (siehe 3.10). Dies geschieht dabei analog zu der Präsentation aus [DDG], welche dort dafür genutzt wurde um Satz 1.1 zu zeigen. Danach werden eine in Kombination mit den Frenet-Gleichungen (siehe 2.27) äquivalente Differentialgleichung zu der Willmore-Gleichung unter Axialsymmetrie hergeleitet. Dieselbe Gleichung wurde bereits in [LS1] ebenfalls mittels einer Variation der elastischen Energie (siehe 3.9 und 3.12) berechnet.

3.1 Die Willmore-Energie im Vergleich zur elastischen Energie

3.1 Definition

Eine reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ ist axialsymmetrisch (um die x -Achse) genau dann, wenn eine glatte Funktion $u \in C^\infty([t_0, t_1], (0, \infty))$ mit $t_0 < t_1$ existiert, sodass S global mit folgender Funktion $f : [t_0, t_1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$(x, \varphi) \mapsto f(x, \varphi) = (x, u(x) \cos \varphi, u(x) \sin \varphi)$$

parametrisiert werden kann. Damit gilt $f([t_0, t_1] \times [0, 2\pi]) = S$.

Umgekehrt generiert jede positive glatte Funktion u auf einem Intervall eine axialsymmetrische Fläche $S(u)$ mithilfe der Parametrisierung f . In beiden Fällen spricht man von u als der Profilkurve von S .

3.2 Hilfssatz

Sei $u \in C^\infty([t_0, t_1], (0, \infty))$ die Profilkurve von $S(u)$. Dann gelten folgende Formeln:

- *Der metrische Tensor:*

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + u'(x)^2 & 0 \\ 0 & u(x)^2 \end{pmatrix}$$

- *Die Determinante des metrischen Tensors:*

$$\det(g_{ij}) = u(x)^2(1 + u'(x)^2)$$

- *Die innere Normale:*

$$\nu(x, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + u'(x)^2}}(u'(x), -\cos \varphi, -\sin \varphi)$$

- *Die zweite Fundamentalform:*

$$(h_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \begin{pmatrix} -u''(x) & 0 \\ 0 & u(x) \end{pmatrix}$$

- Die mittlere Krümmung

$$\begin{aligned} H &= -\frac{u''(x)}{2(1+u'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}} \\ &= \frac{1}{2u(x)u'(x)} \left(\frac{u(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \right)' \end{aligned}$$

- Die Gauß-Krümmung

$$G = -\frac{u''(x)}{u(x)(1+u'(x)^2)^2}.$$

Beweis. Sei $f(x, \varphi) = (x, u(x) \cos \varphi, u(x) \sin \varphi)$ die Parametrisierung von $S(u)$. Dann bestimmt man zuallererst die durch die Parametrisierung induzierte Basis des Tangentialraumes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= (1, u'(x) \cos \varphi, u'(x) \sin \varphi) \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= (0, -u(x) \sin \varphi, u(x) \cos \varphi). \end{aligned}$$

Dann berechnet sich der metrische Tensor zu

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+u'(x)^2 & 0 \\ 0 & u(x)^2 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante von (g_{ij}) ist trivial zu berechnen, da der metrische Tensor Diagonalgestalt besitzt.

Nun berechnet man die zweiten Ableitungen der Parametrisierung:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)_{i,j=x,\varphi} = \begin{pmatrix} (0, u''(x) \cos \varphi, u''(x) \sin \varphi) & (0, -u'(x) \sin \varphi, u'(x) \cos \varphi) \\ (0, -u'(x) \sin \varphi, u'(x) \cos \varphi) & (0, -u(x) \cos \varphi, -u(x) \sin \varphi) \end{pmatrix}.$$

Die Normale ν von $S(u)$ wird wie folgt ausgerechnet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= (u'(x)u(x), -u(x) \cos \varphi, -u(x) \sin \varphi) \\ \Rightarrow \nu &= (u'(x)u(x), -u(x) \cos \varphi, -u(x) \sin \varphi) \frac{1}{\sqrt{(u'(x)u(x))^2 + (u(x))^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{u'(x)^2 + 1}} (u'(x), -\cos \varphi, -\sin \varphi). \end{aligned}$$

Die zweite Fundamentalform berechnet sich dann zu

$$(h_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \begin{pmatrix} -u''(x) & 0 \\ 0 & u(x) \end{pmatrix}.$$

Um die mittlere Krümmung und die Gauß-Krümmung zu erhalten, berechnet man erst die Weingartenabbildung $(W_{ij})_{i,j=1,2}$ (siehe 2.4), also das Matrixprodukt des inversen metrischen Tensors mit der zweiten Fundamentalform:

$$(W_{ik})_{i,k=1,2} := (g^{ik} \circ h_{ik})_{i,k=1,2} = \frac{1}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{u''(x)}{1+u'(x)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u(x)} \end{pmatrix}.$$

$$H = \frac{1}{2} \text{Spur}((W_{ik})_{i,k=1,2}) = -\frac{u''(x)}{2(1+u'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}}$$

$$K = \det((W_{ik})_{i,k=1,2}) = -\frac{u''(x)}{u(x)(1+u'(x)^2)^2}.$$

□

3.3 Hilfssatz

Sei $u \in C^\infty([-1, 1], (0, \infty))$ die Profilkurve einer axialsymmetrischen, regulären Fläche S . Dann gilt für die Willmore-Energie dieser Fläche

$$\begin{aligned} W(S(u)) &= \int_{S(u)} H^2 dA \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}} - \frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 u(x)\sqrt{1+u'(x)^2} dx. \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} W(S(u)) &= \int_{S(u)} H^2 dS \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 H(x, \varphi)^2 \sqrt{\det(g_{ij})} dx d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}} - \frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 u(x)\sqrt{1+u'(x)^2} dx \end{aligned}$$

□

Nachdem man alle nötigen Größen für die extrinsische Beschreibung der Willmore-Energie für axialsymmetrische Flächen gesammelt hat, transformiert man das Problem nun in die hyperbolische Halbebene und führt dafür die benötigten Größen ein.

3.4 Definition (hyperbolische Halbebene)

Die hyperbolische Halbebene \mathbb{H}^2 besteht aus der oberen Halbebene $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) : y > 0\}$, wird mithilfe der Identität parametrisiert und in diesen Koordinaten mit folgender Metrik ausgestattet:

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{y^2} \delta_{ij}.$$

Insgesamt kürzt man $(\mathbb{R}_+^2, (g_{ij}))$ hier mit \mathbb{H}^2 ab.

3.5 Hilfssatz (Christoffelsymbole)

Die Christoffelsymbole von \mathbb{H}^2 berechnen sich zu

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0$$

$$\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}$$

Beweis. Beachte, dass

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \delta_{ij} \delta_{2k} \left(-2 \frac{1}{y^3} \right)$$

und setze dies in 2.9 ein. □

3.6 Hilfssatz

Sei $c : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ eine reguläre glatte Kurve wobei $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ mit $t_0 < t_1$. Dann gilt für die kovariante Ableitung von \dot{c} in Richtung \dot{c}

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = \left(\ddot{c}^1 - 2 \frac{1}{c^2} \dot{c}^1 \dot{c}^2 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\ddot{c}^2 - \frac{1}{c^2} (\dot{c}^2)^2 + \frac{1}{c^2} (\dot{c}^1)^2 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin gilt für die Einheitsnormale N von c

$$N = \frac{1}{\sqrt{g(\dot{c}, \dot{c})}} (-\dot{c}^2, \dot{c}^1),$$

wobei $g(\cdot, \cdot)$ die Metrik von \mathbb{H}^2 ist. Hierbei wurde außerdem die Vorzeichenkonvention für N gewählt, die einer positiven Orientierung in \mathbb{R}^2 zu \dot{c} entspricht.

Beweis. Die Formel für die kovariante Ableitung ist eine direkte Folgerung aus 3.5 und 2.10.

Die Formel für die Einheitsnormale ist evident, da die Metrik von \mathbb{H}^2 konform zur euklidischen Metrik des \mathbb{R}^2 ist. □

3.7 Hilfssatz

Sei $u \in C^\infty([x_0, x_1], (0, \infty))$ und $c : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ mit $x \mapsto (x, u(x))$ der Graph der Funktion u . Die geodätische Krümmung κ von c interpretiert als Kurve berechnet sich dann zu

$$\kappa(x) = -\frac{u(x)^2}{u'(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{u(x) \sqrt{1 + u'(x)^2}} \right) = \frac{u(x) u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + u'(x)^2}}.$$

Beweis. Sei $c = (c^1, c^2)$ die obige Kurve. Dann berechnet sich die kovariante Ableitung von \dot{c} zu:

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{c}} \dot{c} &= \left(\ddot{c}^1 - 2 \frac{1}{c^2} \dot{c}^1 \dot{c}^2 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\ddot{c}^2 - \frac{1}{c^2} (\dot{c}^2)^2 + \frac{1}{c^2} (\dot{c}^1)^2 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \frac{u'(x)}{u(x)} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u''(x) - \frac{u'(x)^2}{u(x)} + \frac{1}{u(x)} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sei N die Normale von c mit

$$N = \frac{1}{\sqrt{g(\dot{c}, \dot{c})}} (-\dot{c}^2, \dot{c}^1) = \frac{u(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} (-u'(x), 1)$$

Hierbei ist natürlich $g_p : T_p \mathbb{H}^2 \times T_p \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Riemannsche Metrik von \mathbb{H}^2 .

Die geodätische Krümmung berechnet sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned} \kappa(x) &= \frac{g_p(\nabla_{\dot{c}} \dot{c}, N)}{g_p(\dot{c}, \dot{c})} = \frac{\frac{1}{u(x)^2} \left(-2 \frac{u'(x)}{u(x)} (-u'(x)) + u''(x) - \frac{u'(x)^2}{u(x)} + \frac{1}{u(x)} \right)}{\frac{u'(x)^2 + 1}{u(x)^2} \sqrt{\frac{u'(x)^2 + 1}{u(x)^2}}} \\ &= u(x) \frac{u''(x) + \frac{u'(x)^2}{u(x)} + \frac{1}{u(x)}}{(u'(x)^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u(x) u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + u'(x)^2}}. \end{aligned}$$

□

3.8 Hilfssatz

Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}, (0, \infty))$, dann berechnet sich die Länge der Kurve $c(x) := (x, u(x))$ in der hyperbolischen Halbebene \mathbb{H}^2 zu

$$L_{(0,x)}(c) = \int_0^x \frac{\sqrt{1 + u'(s)^2}}{u(s)} ds.$$

Beweis. Einsetzen von $(x, u(x))$ in die Formel aus 2.24. □

3.9 Definition (elastische Energie)

Sei $c : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ eine reguläre Kurve und $\kappa : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ die geodätische Krümmung von c . Dann definiert man die elastische Energie von c durch

$$\tilde{W}(c) := \int_{t_0}^{t_1} \kappa(x)^2 ds(x).$$

Mit folgendem Satz transformiert man das Dirichlet Problem aus Satz 1.1 in die hyperbolische Halbebene.

3.10 Satz (siehe auch [LS2], [DDG] Kapitel 2.2)

Sei $u \in C^\infty([-1, 1], (0, \infty))$ und $S(u)$ die zugehörige Rotationsfläche, sowie $c_u : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ definiert durch $c_u(x) := (x, u(x))$, also der Graph von u . Dann gilt

$$W(S(u)) = \frac{\pi}{2} \tilde{W}(c_u) - 2\pi \left[\frac{u'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right]_{-1}^1.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \tilde{W}(c_u) &= \int_{-1}^1 \kappa(x)^2 ds(x) = \int_{-1}^1 \kappa(x)^2 \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{u(x)} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{u(x)u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right)^2 \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{u(x)} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{u(x)^2 u''(x)^2}{(1 + u'(x)^2)^3} + 2 \frac{u(x)u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^2} + \frac{1}{1 + u'(x)^2} \right) \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{u(x)} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{u''(x)^2}{(1 + u'(x)^2)^3} + 2 \frac{u''(x)}{u(x)(1 + u'(x)^2)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{u(x)^2(1 + u'(x)^2)} \right) u(x) \sqrt{1 + u'(x)^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{u''(x)^2}{(1 + u'(x)^2)^3} - 2 \frac{u''(x)}{u(x)(1 + u'(x)^2)^2} + \frac{1}{u(x)^2(1 + u'(x)^2)} \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{u''(x)}{u(x)(1 + u'(x)^2)^2} \right) u(x) \sqrt{1 + u'(x)^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{u(x)\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right)^2 u(x) \sqrt{1 + u'(x)^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4 \int_{-1}^1 \frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} dx \\
\stackrel{3.3}{=} & \frac{2}{\pi} \int_{S(u)} H^2 dS - \frac{2}{\pi} \int_{S(u)} G dS \\
= & \frac{2}{\pi} W(S(u)) + 4 \left[\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \right]_{-1}^1.
\end{aligned}$$

□

3.11 Folgerung

Die elastische Energie ist invariant unter Moebius-Transformationen Φ des \mathbb{R}^2 , für die gilt $\Phi(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$.

Beweis. Sei $\tilde{\Phi}$ die Poincaré-Fortsetzung von Φ auf den \mathbb{R}^3 . Dann ist die Willmore-Energie minus das Integral über die Gauß-Krümmung invariant unter $\tilde{\Phi}$. Außerdem resultiert aus der Transformation mit dieser fortgesetzten Moebius-Transformation wieder eine axial-symmetrische Fläche, denn $\tilde{\Phi}$ lässt \mathbb{H}^2 invariant. Dies impliziert mit dem Beweis von 3.10, dass die elastische Energie invariant unter der Moebius-Transformation ist. □

3.2 Die hyperbolische Krümmung parametrisiert nach Bogenlänge

In diesem Kapitel wird eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Krümmung eines Graphen einer Funktion hergeleitet, welche kritisch für die elastische Energie ist, indem man den Graphen nach Bogenlänge parametrisiert. Diese Idee stammt dabei aus [LS1] Gleichung (1.1).

3.12 Hilfssatz (siehe Lemma 2.1 in [DDG] und [LS1])

Sei $u \in C^4([-1, 1])$, sodass $\forall \varphi \in C_0^\infty(-1, 1)$ gilt $\frac{d}{dt} \tilde{W}(u + t\varphi)|_{t=0} = 0$. Dann gilt für u folgende Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{u(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{u(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \kappa'(x) \right) - \kappa(x) + \frac{1}{2} \kappa(x)^3 = 0, \quad x \in (-1, 1)$$

wobei κ die geodätische Krümmung von $(x, u(x))$ bezüglich \mathbb{H}^2 und der in 3.7 festgelegte Orientierung ist.

Beweis. Siehe Anhang A in [DDG]. □

3.13 Satz (siehe [LS1] Gleichung (1.2))

Sei $u \in C^4([-1, 1], (0, \infty))$ kritisch für die elastische Energie. Sei weiterhin $c(x) := (x, u(x))$ und \tilde{c} die Kurve, die c nach Bogenlänge parametrisiert (siehe 2.26). Dann gilt für die geodätische Krümmung K von \tilde{c} bezüglich der hyperbolischen Halbebene \mathbb{H}^2

$$\forall s : K''(s) - K(s) + \frac{1}{2} K^3(s) = 0.$$

Beweis. Sei

$$\ell(x) := \int_0^x \frac{\sqrt{1 + u'(\xi)^2}}{u(\xi)} d\xi$$

die Länge von c . Dann gilt wegen der Bogenlängenparametrisierung von K

$$K(\ell(x)) = \kappa(x).$$

Damit gelten für die Ableitungen von K folgende Aussagen:

$$\begin{aligned} K'(\ell(x)) &= \frac{u(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \kappa'(x) \\ K''(\ell(x)) &= \frac{u(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{u(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \kappa'(x) \right) \end{aligned}$$

Setzt man dies in 3.12 ein, erhält man die zu zeigende Aussage. □

4 Analyse der Krümmungsgleichung

In diesem Kapitel wird die Differentialgleichung aus 3.13 untersucht:

$$K''(s) = K(s) - \frac{1}{2}K^3(s). \quad (\text{KODE})$$

Löst man diese Gleichung mithilfe eines in Maple(TM)¹ vorimplementierten Runge-Kutta Verfahrens numerisch, erhält man eine Idee, wie die Lösungen sich in Abhängigkeit der Anfangsdaten verhalten. In den nachfolgenden Bildern wurde $K(0)$ variiert und $K'(0) = 0$ gesetzt. Dabei wird o.B.d.A. nur $K(0) > 0$ betrachtet, denn $-K$ löst (KODE) ebenfalls. Zuerst werden Lösungen betrachtet, bei denen $K(0) \geq 2$ ist:

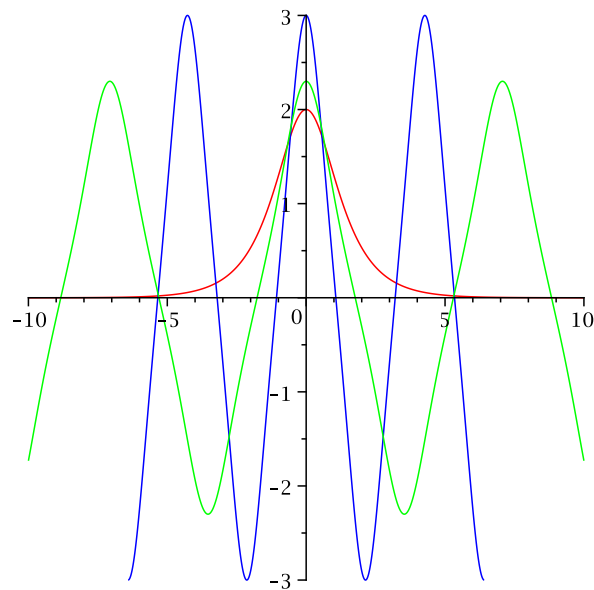


Abbildung 1: Numerische Lösungen von (KODE) mit $K(0) \geq 2$

Hier erkennt man, dass die Funktionen, bei denen $K(0) > 2$ gilt, einen Vorzeichenwechsel zu haben scheinen und periodisch sind. Nun fehlen noch die Lösungen mit $K(0) \leq 2$:

¹Maple 12. Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., Waterloo, Ontario

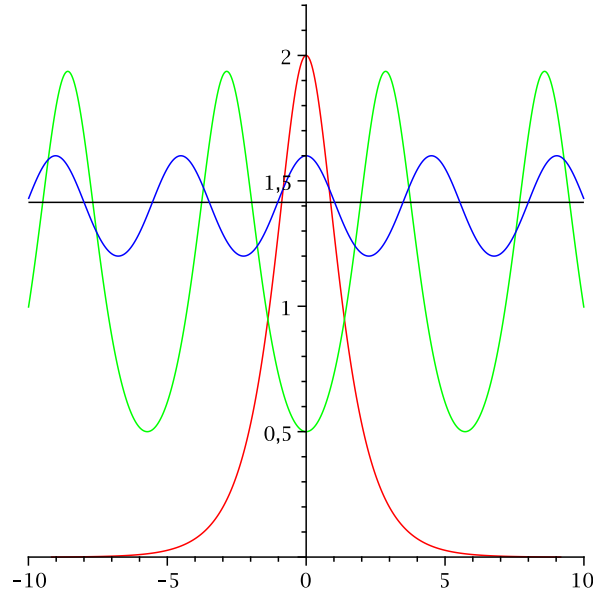


Abbildung 2: Numerische Lösungen von (KODE) mit $K(0) \leq 2$

Hier ergibt sich ein ähnliches Bild. Alle Lösungen mit Ausnahme von $K(0) = 2$ sind periodisch, allerdings sind diese nun strikt positiv.

Dieses Verhalten wird im folgenden Kapitel rigoros nachgewiesen, indem man die Ergebnisse aus [LS1] Tabelle 2.7c genau ausarbeitet und ergänzt.

4.1 Anwendung der Energiemethode

In diesem Abschnitt wird die Energiemethode auf (KODE) angewendet und man zieht erste wichtige Schlussfolgerungen über das Verhalten der Lösungen.

4.1 Hilfssatz (siehe [LS1] Gleichung (2.1))

Alle Lösungen von (KODE) mit den Anfangsdaten $K(0) = K_0$ und $K'(0) = K'_0$ erfüllen folgende Gleichung

$$(K'(s))^2 = K^2(s) - \frac{1}{4}K^4(s) - K_0^2 + \frac{1}{4}K_0^4 + (K'_0)^2$$

Beweis. Die Gleichung wird mithilfe der Energiemethode hergeleitet. Dafür wird (KODE) mit $K'(s)$ durchmultipliziert und von 0 bis s integriert.

$$\begin{aligned} K''(s) &= K(s) - \frac{1}{2}K^3(s) \\ \Rightarrow K''(s)K'(s) &= K(s)K'(s) - \frac{1}{2}K^3(s)K'(s) \\ \Rightarrow \int_0^s K''(t)K'(t) dt &= \int_0^s K(t)K'(t) - \frac{1}{2}K^3(t)K'(t) dt \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(K'(s))^2 - \frac{1}{2}(K'_0)^2 &= \frac{1}{2}K^2(s) - \frac{1}{8}K^4(s) - \frac{1}{2}K_0^2 + \frac{1}{8}K_0^4 \\ \Rightarrow (K'(s))^2 &= K^2(s) - \frac{1}{4}K^4(s) - K_0^2 + \frac{1}{4}K_0^4 + (K'_0)^2 \end{aligned}$$

□

4.2 Folgerung

Jede Lösung von (KODE) ist stets beschränkt.

Beweis. Dies folgt aus der Tatsache, dass die rechte Seite der Gleichung in 4.1 ein Polynom vierten Grades in $K(s)$ ist, dessen Vorfaktor vor dem Monom mit dem höchsten Grad negativ ist. Dies bedeutet, dass das Polynom asymptotisch gegen $-\infty$ strebt, damit eine unbeschränkte Lösung ein kompaktes maximales Existenzintervall hätte, ein Widerspruch.

□

4.3 Bemerkung

Die Beschränktheit von K liefert mithilfe von 4.1 die Beschränktheit von K' und damit auch von K'' . Dies impliziert, dass das maximale Existenzintervall einer Lösung ganz \mathbb{R} ist.

4.4 Hilfssatz (siehe auch [LS1] Tabelle 2.7c)

Die eindeutige Lösung zu (KODE) mit den Anfangsdaten $K_0 = 2$ und $K'_0 = 0$ ist

$$K(s) = \frac{2}{\cosh(s)}.$$

Beweis. Man berechnet die Ableitungen von K und setzt diese danach in (KODE) ein.

$$\begin{aligned} K'(s) &= -\sinh(s) \frac{2}{\cosh^2(s)} \\ K''(s) &= -\cosh(s) \frac{2}{\cosh^2(s)} + 2 \sinh^2(s) \frac{2}{\cosh^3(s)} \\ &= -\frac{2}{\cosh(s)} - \frac{4}{\cosh^3(s)} + \frac{4}{\cosh(s)} \\ &= \frac{2}{\cosh(s)} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\cosh(s)} \right)^3 = K(s) - \frac{1}{2} K^3(s). \end{aligned}$$

Die Anfangsdaten ergeben außerdem

$$K(0) = \frac{2}{\cosh(0)} = 2, \quad K'(0) = -\sinh(0) \frac{2}{\cosh^2(0)} = 0.$$

Die Eindeutigkeit folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf, da die rechte Seite der Gleichung von (KODE) ein Polynom, damit glatt in K ist. Dies sichert übrigens auch die Existenz von lokalen Lösungen bei jedem beliebigen Anfangswert. □

4.5 Bemerkung

Fertigt man einen Plot der Funktion von 4.4 an, erhält man folgendes Bild:

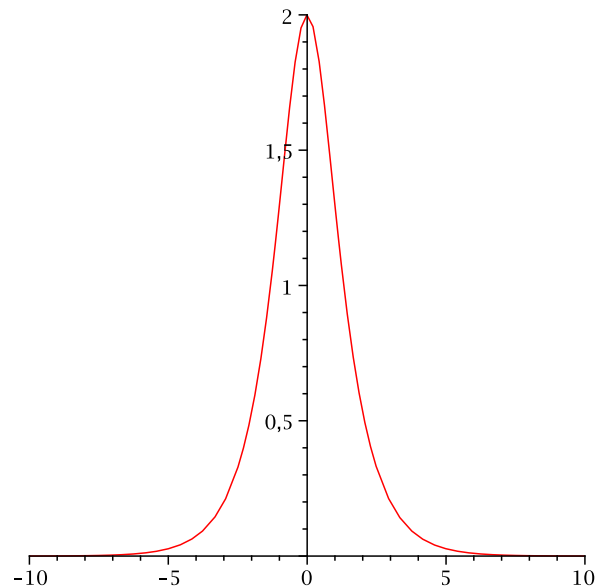


Abbildung 3: Plot von $K(s) = \frac{2}{\cosh s}$

Wie man leicht sieht besitzt diese Funktion nur Werte im Intervall $(0, 2]$. Außerdem erkennt man folgende Asymptotik:

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{\cosh(s)} = 0.$$

Außerdem ist sie nicht periodisch.

Folgender Satz ist ein erster Schritt, das globale Verhalten von Lösungen von (KODE) zu verstehen.

4.6 Satz

Alle periodischen, positiven Lösungen K von (KODE) erfüllen $\forall s \ K(s) \in (0, 2)$.

Beweis. Der Beweis wird über Widerspruch geführt, das heißt man nimmt an, es existiert eine periodische positive Lösung K von (KODE), sodass ein Punkt $s^* \in \mathbb{R}$ existiert bei dem gilt, dass $K(s^*) \geq 2$. Wegen der Periodizität kann man o.B.d.A. annehmen, dass $K(s^*) = \sup_{s \in \mathbb{R}} K(s)$ gilt und wegen der Autonomie von (KODE), dass $s^* = 0$. Daraus kann nun sofort gefolgert werden, dass $K'(0) = 0$ ist, also ist man in der Situation der Bilder aus der Einleitung.

Nun müssen 2 Fälle unterschieden werden:

- $K(0) = 2$:
In diesem Fall kann man Lemma 4.2 anwenden und erhält, wie in 4.5 gesehen, eine nichtperiodische positive Lösung, also ein Widerspruch zu den Voraussetzungen.
- $K(0) > 2$:
Zuallererst wird durch $K'(0) = 0$ die Gleichung aus 4.1 vereinfacht:

$$(K'(s))^2 = K^2(s) - \frac{1}{4}K^4(s) - K_0^2 + \frac{1}{4}K_0^4.$$

Dies ist also ein biquadratisches Polynom in K . Setzt man nun $K = \pm K_0$ ergeben sich auf der rechten Seite 2 Nullstellen und damit kann folgender Ansatz gemacht werden, um dieses Polynom zu vereinfachen:

$$K^2 - \frac{1}{4}K^4 - K_0^2 + \frac{1}{4}K_0^4 = d(K^2 - K_0^2)(K^2 - a)$$

mit $a, d \in \mathbb{R}$. Damit berechnen sich die Vorfaktoren zu $d = -\frac{1}{4}$ und $a = 4 - K_0^2$, also erhält man

$$(K'(s))^2 = -\frac{1}{4}(K^2(s) - K_0^2)(K^2(s) - 4 + K_0^2) \quad (*)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung muss also insgesamt nichtnegativ sein, damit die Ableitung reellwertig ist.

Wegen der Periodizität von K findet man ein $\hat{s} \in \mathbb{R}$ mit $K(\hat{s}) = \inf_{s \in \mathbb{R}} K(s)$, also muss gelten $K'(\hat{s}) = 0$. Alle möglichen Nullstellen der Ableitung werden von (*) beschrieben. Allerdings gilt mit $K_0 > 2$, dass $-4 + K_0^2 > 0$, damit besitzt das Polynom auf der rechten Seite von (*) nur zwei Lösungen, und zwar $\pm K_0$. Also muss $K(\hat{s}) = \pm K_0$ sein.

Sollte $K(\hat{s}) = -K_0$ sein, ist dies sofort ein Widerspruch.

Ist andererseits $K(\hat{s}) = K_0$ ist $K = \text{const}$. Die einzigen konstanten Lösungen von (KODE) sind aber nur $K = \pm\sqrt{2}$ und $K = 0$. Weitere können nicht existieren, da auf der rechten Seite von (KODE) ein Polynom 3. Grades steht. Dies stellt allerdings ein Widerspruch zu $K_0 > 2$ dar.

□

4.2 Jacobische elliptische Funktionen

In diesem Paragraphen werden Grundlagen zu Jacobischen elliptischen Funktionen eingeführt, mit denen man mithilfe von Satz 4.15 alle Lösungen von (KODE) charakterisieren kann. Dieses Unterkapitel basiert dabei auf [AS], allerdings werden hier Beweise gegeben und einige weitere Fakten gesammelt.

4.7 Definition (siehe [AS] 16.1.3)

Für einen Parameter $k \in (0, 1)$ wird folgende Funktion definiert:

$$F_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_k(\varphi) := \int_0^\varphi \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi)}} d\psi$$

F_k' ist offensichtlich positiv, da $k \in (0, 1)$, also existiert F_k^{-1} . Setze nun noch

$$\text{AM}(s, k) := F_k^{-1}(s).$$

4.8 Definition (siehe [AS] 16.1.5)

Für einen Parameter $k \in (0, 1)$ werden folgende Funktionen definiert:

$$\text{sn} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], \quad \text{sn}(s, k) := \sin \varphi \Big|_{\varphi=F_k^{-1}(s)} = \sin \circ \text{AM}(s, k)$$

$$\text{cn} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], \quad \text{cn}(s, k) := \cos \varphi \Big|_{\varphi=F_k^{-1}(s)} = \cos \circ \text{AM}(s, k)$$

$$\text{dn} : \mathbb{R} \rightarrow \left[\sqrt{1 - k^2}, 1 \right], \quad \text{dn}(s, k) := \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \Big|_{\varphi=F_k^{-1}(s)} = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(s, k)}$$

4.9 Hilfssatz

Sei $k \in (0, 1)$ fixiert, dann gilt

$$AM'(s, k) = \operatorname{dn}(s, k)$$

Beweis. Der Hilfssatz folgt aus der Formel zur Berechnung der Ableitung der inversen Funktion. Dafür muss die Ableitung von F_k berechnet werden.

$$F_k'(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\varphi)}}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} AM'(s, k) &= (F_k(s)^{-1})' = \frac{1}{F_k'(F_k^{-1}(s))} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(F_k^{-1}(s))}}} \\ &= \sqrt{1 - k^2 \sin^2(F_k^{-1}(s))} = \operatorname{dn}(s, k). \end{aligned}$$

□

Damit können nun die Ableitungen der Jacobischen elliptischen Funktionen berechnet werden. Die nachfolgenden Ableitungsoperationen beziehen sich immer auf die s -Komponente der Variable in der Definition der Funktionen, siehe 4.8.

4.10 Satz (siehe [AS] Tabelle 16.16)

Sei $k \in (0, 1)$, dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}'(s, k) &= \operatorname{dn}(s, k) \operatorname{cn}(s, k) \\ \operatorname{cn}'(s, k) &= -\operatorname{dn}(s, k) \operatorname{sn}(s, k) \\ \operatorname{dn}'(s, k) &= -k^2 \operatorname{cn}(s, k) \operatorname{sn}(s, k) \end{aligned}$$

Beweis. Die ersten beiden Gleichungen folgen direkt aus der Kettenregel, der Ableitungen des \sin bzw. des \cos und 4.9.

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}'(s, k) &= \left(\sqrt{1 - k^2 \sin^2(F_k^{-1}(s))} \right)' \\ &= \operatorname{dn}(s, k) (-2k^2 \sin(F_k^{-1}(s)) \cos(F_k^{-1}(s))) \frac{1}{2\sqrt{1 - k^2 \sin^2(F_k^{-1}(s))}} \\ &= -k^2 \operatorname{cn}(s, k) \operatorname{sn}(s, k). \end{aligned}$$

□

4.11 Bemerkung

Nun können noch 2 wichtige, aber einfache Identitäten bemerkt werden

$$\forall s \in \mathbb{R}, \forall k \in (0, 1) : \operatorname{sn}^2(s, k) + \operatorname{cn}^2(s, k) = 1$$

und

$$\forall s \in \mathbb{R}, \forall k \in (0, 1) : \operatorname{dn}^2(s, k) + k^2 \operatorname{sn}^2(s, k) = 1.$$

4.12 Satz

Sei $k \in (0, 1)$ fest, dann sind die Funktionen sn , cn und dn in der s -Variablen periodisch.

Beweis. Zuerst betrachtet man $F_k^{-1}(s)$ und setzt $F_k^{-1}(aF_k(\frac{\pi}{2}) + s) =: x$, mit $a \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{R}$. Nun muss x in Abhängigkeit von s berechnet werden. Man erhält folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\varphi)}} d\varphi &= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\varphi)}} d\varphi + s \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\varphi)}} d\varphi + s \\ &\Rightarrow \int_0^{x - \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\varphi)}} d\varphi = s \end{aligned}$$

Also erhält man folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} F_k^{-1}(s) &= x - \pi \frac{a}{2} \\ F_k^{-1}(aF_k(\frac{\pi}{2}) + s) &= x. \end{aligned}$$

Dies impliziert die für diesen Beweis folgende essentielle Identität

$$F_k^{-1}(aF_k(\frac{\pi}{2}) + s) = F_k^{-1}(s) + \pi \frac{a}{2}.$$

Für dn setzt man $a = 2$ und man erhält

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}(2F_k(\frac{\pi}{2}) + s, k) &= \sqrt{1 - k^2 \sin^2(F_k^{-1}(2F_k(\frac{\pi}{2}) + s))} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\pi + F_k^{-1}(s))} \\ &= \sqrt{1 - k^2 \sin^2(F_k^{-1}(s))} = \operatorname{dn}(s, k). \end{aligned}$$

Analog folgt die Aussage für sn und cn mit $a = 4$. □

4.3 Lösungen der Krümmungsgleichung

In diesem Unterkapitel werden alle möglichen Lösungen von (KODE) berechnet, indem man Tabelle 2.7c aus [LS1] ausarbeitet und zusätzlich einen Satz zeigt, der die Gesamtheit aller Lösungen auf diese zurückführt.

4.13 Satz (siehe [LS1] Tabelle 2.7c)

Sei $K \in C^2(\mathbb{R})$ Lösung zu (KODE) mit den Anfangsdaten $K(0) = K_0 \in (0, 2)$ und $K'(0) = 0$. Dann gilt

$$K(s) = \begin{cases} 2r \operatorname{dn}(r(s + s_0), k), & \text{falls } K_0 \neq \sqrt{2}, \\ \sqrt{2}, & \text{falls } K_0 = \sqrt{2}, \end{cases}$$

mit

$$r = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{K_0}{2}, & \text{falls } K_0 \in (\sqrt{2}, 2), \\ \frac{\sqrt{4-K_0^2}}{2}, & \text{falls } K_0 \in (0, \sqrt{2}), \end{array} \right\} \in \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 1 \right),$$

$$k = \frac{\sqrt{2r^2 - 1}}{r} \in (0, 1),$$

$$s_0 = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{falls } K_0 \in (\sqrt{2}, 2), \\ \frac{1}{r}F_k\left(\frac{\pi}{2}\right), & \text{falls } K_0 \in (0, \sqrt{2}). \end{array} \right.$$

Insbesondere ist $K(\cdot)$ periodisch.

Beweis. Sei o.B.d.A. $K_0 \neq \sqrt{2}$, dann berechnen sich die Ableitungen von K zu

$$\begin{aligned} K'(s) &= -2r^2 \operatorname{cn}(r(s+s_0), k) \operatorname{sn}(r(s+s_0), k) k^2 \\ K''(s) &= -2r^3 k^2 (-\operatorname{dn}(r(s+s_0), k) \operatorname{sn}^2(r(s+s_0), k) + \operatorname{dn}(r(s+s_0), k) \operatorname{cn}^2(r(s+s_0), k)) \\ &= 2r^3 k^2 \operatorname{dn}(r(s+s_0), k) (\operatorname{sn}^2(r(s+s_0), k) - \operatorname{cn}^2(r(s+s_0), k)). \end{aligned}$$

Nun ist damit

$$\begin{aligned} K'' - K + \frac{1}{2}K^3 &= 2r^3 k^2 \operatorname{dn}(\operatorname{sn}^2 - \operatorname{cn}^2) - 2r \operatorname{dn} + 4r^3 \operatorname{dn}^3 \\ &= 2r^3 k^2 \operatorname{dn}(\operatorname{sn}^2 - \operatorname{cn}^2) - 2r \operatorname{dn} + 4r^3 (1 - k^2 \operatorname{sn}^2) \operatorname{dn} \\ &= r^3 k^2 \operatorname{dn}(2 \operatorname{sn}^2 - 2 \operatorname{cn}^2 - 4 \operatorname{sn}^2) - 2r \operatorname{dn} + 4r^3 \operatorname{dn} \\ &= -2r^3 k^2 \operatorname{dn} - 2r \operatorname{dn} + 4r^3 \operatorname{dn} \\ &= -2(2r^3 - r) \operatorname{dn} - 2r \operatorname{dn} + 4r^3 \operatorname{dn} = 0. \end{aligned}$$

Also ist die Differentialgleichung erfüllt. Nun fehlt noch die Überprüfung der Anfangsbedingungen. Sei zuerst $K_0 \in (\sqrt{2}, 2)$,

$$K(0) = 2r \operatorname{dn}(0, k) = 2r \sqrt{1 - k^2 \sin^2(F_k^{-1}(0))} = 2r = K_0.$$

Sei nun $K_0 \in (0, \sqrt{2})$, damit folgt

$$\begin{aligned} K(0) &= 2r \operatorname{dn}(rs_0, k) = 2r \sqrt{1 - k^2 \sin^2(F_k^{-1}(rs_0))} \\ &= 2r \sqrt{1 - k^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 2r \sqrt{1 - k^2} \\ &= \sqrt{4 - K_0^2} \sqrt{1 - \frac{2r^2 - 1}{r^2}} = \sqrt{4 - K_0^2} \sqrt{\frac{1}{r^2} - 1} \\ &= \sqrt{4 - K_0^2} \sqrt{\frac{4}{4 - K_0^2} - 1} = K_0. \end{aligned}$$

Nun fehlt noch die Ableitung

$$\begin{aligned} K'(0) &= -2r^2 \operatorname{cn}(rs_0, k) \operatorname{sn}(rs_0, k) \\ &= -2r^2 \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sn}(rs_0, k) = 0, & \text{falls } K_0 \in (0, \sqrt{2}) \\ \operatorname{cn}(0, k) \operatorname{sn}(0, k) = 0, & \text{falls } K_0 \in (\sqrt{2}, 2). \end{cases} \end{aligned}$$

Der Rest folgt aus dem Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf. □

4.14 Satz (siehe [LS1] Tabelle 2.7c)

Sei $K \in C^2(\mathbb{R})$ eine Lösung zu (KODE) mit den Anfangsdaten $K(0) = K_0 > 2$ und $K'(0) = 0$, dann gilt

$$K(s) = K_0 \operatorname{cn}(rs, k)$$

mit

$$r = \sqrt{-1 + \frac{1}{2}K_0^2}$$

$$k = \frac{K_0}{2r}$$

Insbesondere ist K periodisch.

Beweis. Zuerst überzeugt man sich, dass K wohldefiniert ist, indem man prüft, dass $k \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} k &= \frac{K_0}{2r} = \frac{K_0}{2\sqrt{-1 + \frac{1}{2}K_0^2}} \\ &= \sqrt{\frac{K_0^2}{4(-1 + \frac{1}{2}K_0^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{-\frac{4}{K_0^2} + 2}} \begin{cases} < 1, & \text{denn } \frac{4}{K_0^2} < 1 \\ > \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{denn } \frac{4}{K_0^2} > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Jetzt werden die Ableitungen von K berechnet:

$$\begin{aligned} K'(s) &= -K_0 r \operatorname{dn}(rs, k) \operatorname{sn}(rs, k) \\ K''(s) &= -K_0 r (-k^2 r \operatorname{sn}^2(rs, k) \operatorname{cn}(rs, k) + r \operatorname{dn}^2(rs, k) \operatorname{cn}(rs, k)) \\ &\stackrel{4.8}{=} -K_0 r \operatorname{cn}(rs, k) (-k^2 r \operatorname{sn}^2(rs, k) + r(1 - k^2 \operatorname{sn}^2(rs, k))) \\ &= -K_0 r^2 (\operatorname{cn}(rs, k) - 2k^2 \operatorname{cn}(rs, k) \operatorname{sn}^2(rs, k)) \end{aligned}$$

Nun werden die Anfangsdaten geprüft:

$$\begin{aligned} K(0) &= K_0 \operatorname{cn}(r0, k) = K_0 \cos(0) = K_0 \\ K'(0) &= -K_0 r \operatorname{dn}(0, k) \operatorname{sn}(0, k) = 0. \end{aligned}$$

Jetzt muss nur noch überprüft werden, dass K (KODE) erfüllt, der Rest folgt aus dem Eindeigkeitsatz.

$$\begin{aligned} K'' - K + \frac{1}{2}K^3 &= -K_0 r^2 (\operatorname{cn} - 2k^2 \operatorname{cn} \operatorname{sn}^2) - K_0 \operatorname{cn} + \frac{1}{2}K_0^3 \operatorname{cn}^3 \\ &= K_0 \left(-r^2 + 2k^2 r^2 \operatorname{sn}^2 - 1 + \frac{1}{2}K_0^2 \operatorname{cn}^2 \right) \operatorname{cn} \\ &= K_0 \left(1 - \frac{1}{2}K_0^2 + \frac{1}{2}K_0^2 \operatorname{sn}^2 - 1 + \frac{1}{2}K_0^2 \operatorname{cn}^2 \right) \operatorname{cn} \\ &= K_0 \left(-\frac{1}{2}K_0^2 + \frac{1}{2}K_0^2 \right) \operatorname{cn} = 0. \end{aligned}$$

□

Mit dem folgenden Satz ist es möglich, eine Lösung mit beliebigen Anfangsdaten auf die Ergebnisse aus 4.13, 4.14 und 4.4 zurückzuführen.

4.15 Satz

Sei K eine beliebige Lösung von (KODE). Dann existiert ein $s \in \mathbb{R}$ mit $K'(s) = 0$.

Beweis. Zuerst definiert man $K(0) = K_0$ und $K'(0) = K'_0$ als Anfangsdaten der Lösung K .

Der Beweis wird nun per Widerspruch geführt. Man nehme an, es existiere kein $s \in \mathbb{R}$ mit $K'(s) = 0$, dann ist $K'(s) \neq 0, \forall s \in \mathbb{R}$. Also ist K streng monoton wachsend/fallend und außerdem nach 4.6 beschränkt, damit gilt

$$\exists K_\infty \in \mathbb{R} : \lim_{s \rightarrow \infty} K(s) = K_\infty. \quad (*)$$

Nun betrachtet man die Folge $(n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sie ist divergent gegen ∞ und damit gilt wegen $(*)$ $|K(n) - K(n+1)| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, denn konvergente Folgen sind Cauchy-Folgen. Mithilfe des Mittelwertsatzes bekommt man eine weitere gegen ∞ divergente Folge $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie folgt:

$$0 \leftarrow |K(n) - K(n+1)| = |K'(\xi_n)| |n+1 - n|, \quad \xi_n \in [n, n+1].$$

Also gilt $K'(\xi_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Nun kann wieder mithilfe des Mittelwertsatzes und obiger Divergenz von ξ_n eine weitere gegen ∞ divergente Folge $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstruiert werden:

$$0 \leftarrow |K'(\xi_n) - K'(\xi_{n+2})| = |K''(\eta_n)| \underbrace{|\xi_n - \xi_{n+2}|}_{\geq 1}, \quad \eta_n \in [\xi_n, \xi_{n+2}].$$

Also gilt $K''(\eta_n) \rightarrow 0$.

Nun können die Ergebnisse mithilfe von $(*)$ zusammengefasst werden.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K(\xi_n) = K_\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} K(\eta_n) = K_\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K'(\xi_n) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K''(\eta_n) = 0.$$

Als nächstes müssen diese Konvergenzen in die stetigen Zusammenhänge (KODE) und 4.1 eingesetzt werden und man erhält

$$0 = K_\infty - \frac{1}{2} K_\infty^3 \quad (1)$$

$$0 = K_\infty^2 - \frac{1}{4} K_\infty^4 - K_0^2 + \frac{1}{4} K_0^4 + (K_0')^2. \quad (2)$$

Analog erhält man mit der Asymptotik gegen $-\infty$ und der Bezeichnung $\lim_{s \rightarrow -\infty} K(s) = K_{-\infty}$ folgende Gleichungen:

$$0 = K_{-\infty} - \frac{1}{2} K_{-\infty}^3 \quad (3)$$

$$0 = K_{-\infty}^2 - \frac{1}{4} K_{-\infty}^4 - K_0^2 + \frac{1}{4} K_0^4 + (K_0')^2. \quad (4)$$

Die einzigen Lösungen für (1) sind $K_\infty = 0$ und $K_\infty = \pm\sqrt{2}$. Diese werden im Nachfolgenden durch eine Fallunterscheidung bearbeitet.

(a) $K_\infty = \pm\sqrt{2}$:

Setzt man K_∞ in (2) ein, erhält man eine Bedingung an K_0 und K'_0 :

$$0 = 1 - K_0^2 + \frac{1}{4}K_0^4 + (K'_0)^2 = \left(1 - \frac{K_0^2}{2}\right)^2 + (K'_0)^2. \quad (5)$$

Die einzige Möglichkeit (5) zu lösen, besteht darin, dass $K'_0 = 0$ ist. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme.

(b) $K_\infty = 0$:

Wegen der strengen Monotonie von K muss $K_{-\infty} = \pm\sqrt{2}$ sein. Dies kann völlig analog zum Fall (a) zum Widerspruch geführt werden, indem $K_{-\infty}$ in (4) eingesetzt wird.

□

4.16 Bemerkung

Da (KODE) autonom ist, kann jede nichtnegative Lösung $K \in C^2(\mathbb{R})$ mit Satz 4.15 mittels einer einfachen Translation im Argument zu dem Fall $K_0 \geq 0$ beliebig und $K'_0 = 0$ zurückgeführt werden. Also besitzt jede dieser Lösungen entweder die Gestalt aus 4.13, 4.14 oder 4.4.

Die Nichtnegativität von K ist allerdings keine Einschränkung, denn auf der rechten Seite von (KODE) steht ein ungerades Polynom in K , damit ist $-K$ ebenfalls eine Lösung der Gleichung.

5 Killing-Vektorfelder

In diesem Abschnitt werden die sogenannten Killing-Vektorfelder erarbeitet. Dies beruht dabei auf [L] und [J]. Ziel ist es hierbei Paragraph 6 vorzubereiten, denn dort wird entlang einer Profilkurve einer axialsymmetrischen Willmore-Fläche ein Killing-Vektorfeld bezüglich der hyperbolischen Halbebene gefunden, welches zentral beim Verstehen von globalen Eigenschaften einer solchen Kurve ist.

Dafür sei im folgenden Abschnitt stets (M, g) eine zweidimensionale Riemannsche Fläche.

5.1 Definition (siehe [L] Seite 332)

Sei $f : M \rightarrow M$ eine Abbildung. f ist eine Isometrie genau dann wenn

$$\forall p \in M, \forall V, W \in T_p M : g_{f(p)}(df(p)(V), df(p)(W)) = g_p(V, W).$$

5.2 Definition (siehe [L] Seite 209)

Sei V ein glattes Vektorfeld auf M . Eine Abbildung $\Theta_V : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ heißt Fluss von V genau dann wenn $\forall p \in M$ und $\forall t \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Theta_V(p, t) &= V(\Theta_V(p, t)) \\ \Theta_V(p, 0) &= p. \end{aligned}$$

5.3 Bemerkung

Relaxiert man die Bedingung an die Funktion Θ_V in 5.2 daraufhin nur ein Intervall anstatt ganz \mathbb{R} zu benutzen, kann mit dem Satz von Picard-Lindelöf gezeigt werden, dass für alle Vektorfelder ein eindeutiger Fluss existiert (siehe [L] Satz 9.12). Für die hiesigen Betrachtungen reicht allerdings obige spezielle Definition.

5.4 Definition (siehe [L] Seite 206)

Sei V ein glattes Vektorfeld mit Fluss Θ_V auf M . Sei $p \in M$ fixiert, dann nennt man $t \mapsto \Theta_V(p, t)$ Integralkurve von V .

5.5 Definition (Killing-Vektorfeld, [L] Übung 13.13)

Sei V ein glattes Vektorfeld auf M mit eindeutigem Fluss Θ_V . V heißt Killing-Vektorfeld genau dann, wenn der zugeordnete Fluss $\Theta_V(\cdot, t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ eine Isometrie nach Definition 5.1 ist.

5.6 Bemerkung

In dieser Arbeit sind nur Killing-Vektorfelder in der hyperbolischen Halbebene von Interesse. Obige Definition impliziert $\forall t$ mit

$$\begin{aligned} g_p(V(p), V(p)) &= g_p(d\Theta_V(p, 0)V, d\Theta_V(p, 0)V) = g_{\Theta_V(p, t)}(d\Theta_V(p, t)V, d\Theta_V(p, t)V) \\ &= g_{\Theta_V(p, t)}(V(\Theta_V(p, t)), V(\Theta_V(p, t))), \end{aligned}$$

dass Integralkurven eines Killing-Vektorfeldes proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind. Damit kann es in endlicher Zeit nicht zu einem 'blow-up' in \mathbb{H}^2 kommen, sodass Bemerkung 5.3 hier gerechtfertigt ist.

5.7 Satz (siehe [J] 1.6.7)

Sei V ein glattes Vektorfeld auf M . Dann ist V ein Killing-Vektorfeld genau dann, wenn in lokalen Koordinaten gilt

$$\forall i, j = 1, 2 : \sum_{k=1}^2 \left(V^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{jk} \frac{\partial V^k}{\partial x^i} + g_{ik} \frac{\partial V^k}{\partial x^j} \right) = 0.$$

Beweis. Sei Θ_V der zu V zugehörige Fluss nach 5.2. Sei außerdem $p \in M$, F eine Karte von M , $u := F^{-1}(p)$, und $t \in \mathbb{R}$. Sei weiterhin

$$A_i^j(p, t) := \left(d\Theta_V(p, t) \frac{\partial F}{\partial x^i}(u) \right)^j$$

das Differential von Θ_V in lokalen Koordinaten.

Nun berechnet man die Ableitung von A_i^j nach t : Sei dafür $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eine Kurve mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = \frac{\partial F}{\partial x^i}(u)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(d\Theta_V(p, t) \frac{\partial F}{\partial x^i} \right) \Big|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} (\Theta_V(c(s), t)) \Big|_{s=0} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} (V(c(s))) \Big|_{s=0} \end{aligned}$$

Daraus folgt mit der Kettenregel in lokalen Koordinaten

$$\frac{\partial}{\partial t} A_i^j(p, t) \Big|_{t=0} = \sum_{\ell=1}^2 \delta_{i\ell} \frac{\partial V^j}{\partial x^\ell} = \frac{\partial V^j}{\partial x^i}. \quad (*)$$

' \Rightarrow ' Sei Θ_V eine Isometrie, dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} (g_{ij}(p)) \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} \left(g_{\Theta_V(p, t)} \left(d\Theta_V(p, t) \frac{\partial F}{\partial x^i}, d\Theta_V(p, t) \frac{\partial F}{\partial x^j} \right) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{k, \ell=1}^2 A_i^\ell(p, t) g_{k\ell}(\Theta_V(p, t)) A_j^k(p, t) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \left(\sum_{k, \ell=1}^2 \frac{\partial}{\partial t} A_i^\ell(p, t) g_{k\ell}(\Theta_V(p, t)) A_j^k(p, t) + A_i^\ell(p, t) g_{k\ell}(\Theta_V(p, t)) \frac{\partial}{\partial t} A_j^k(p, t) \right. \\ &\quad \left. + A_i^\ell A_j^k \frac{\partial}{\partial t} (g_{k\ell}(\Theta_V(p, t))) \right) \Big|_{t=0} \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial V^k}{\partial x^i}(p) g_{kj}(p) + \frac{\partial V^k}{\partial x^j}(p) g_{ki}(p) + \left(\sum_{m, k, \ell=1}^2 A_i^\ell(p, t) A_j^k(p, t) V^m \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^m} \right) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{k=1}^2 \frac{\partial V^k}{\partial x^i} g_{kj} + \frac{\partial V^k}{\partial x^j} g_{ki} + V^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

' \Leftarrow ' Es gelten nun die Differentialgleichungen. Seien $W_1, W_2 \in T_p M$ beliebig. Mit obiger Rechnung gilt:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial t} \left(g_{\Theta_V(p,t)} \left(d\Theta_V(p,t)W_1, d\Theta_V(p,t)W_2 \right) \right) \right|_{t=0} \\ &= \sum_{i,j} W_1^i W_2^j \left. \frac{\partial}{\partial t} \left(g_{\Theta_V(p,t)} \left(d\Theta_V(p,t) \frac{\partial F}{\partial x^i}, d\Theta_V(p,t) \frac{\partial F}{\partial x^j} \right) \right) \right|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Sei nun $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest, dann gilt

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial t} \left(g_{\Theta_V(p,t)} \left(d\Theta_V(p,t) \frac{\partial F}{\partial x^i}, d\Theta_V(p,t) \frac{\partial F}{\partial x^j} \right) \right) \right|_{t=t_0} \\ \stackrel{t=s+t_0}{=} & \left. \frac{\partial}{\partial s} \left(g_{\Theta_V(p,t_0+s)} \left(d\Theta_V(p,t_0+s) \frac{\partial F}{\partial x^i}, d\Theta_V(p,t_0+s) \frac{\partial F}{\partial x^j} \right) \right) \right|_{s=0} \\ = & \left. \frac{\partial}{\partial s} \left(g_{\Theta_V(\Theta_V(p,t_0),s)} \left(d\Theta_V(\Theta_V(p,t_0),s) \underbrace{d\Theta_V(p,t_0) \frac{\partial F}{\partial x^i}}_{:=W_i}, \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. d\Theta_V(\Theta_V(p,t_0),s) \underbrace{d\Theta_V(p,t_0) \frac{\partial F}{\partial x^j}}_{:=W_j} \right) \right) \right|_{s=0} \\ \stackrel{p'=\Theta_V(p,t_0)}{=} & \left. \frac{\partial}{\partial s} \left(g_{\Theta_V(p',s)} \left(d\Theta(p',s)W_i, d\Theta_V(p',s)W_j \right) \right) \right|_{s=0} = 0. \end{aligned}$$

□

Folgendes Beispiel ist zentral für den Beweis des Hauptsatzes 1.2.

5.8 Beispiel

Ein Vektorfeld V auf der hyperbolischen Halbebene \mathbb{H}^2 ist ein Killing-Vektorfeld genau dann, wenn es folgende Gestalt besitzt:

$$V(x, y) = a \begin{pmatrix} \frac{x^2 - y^2}{2} \\ xy \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ beliebig sind.

Beweis. Die Killing-Bedingung aus Satz 5.7 wird in der hyperbolischen Halbebene zu folgendem System partieller Differentialgleichungen

$$0 = \frac{2}{y^2} \left(-\frac{V^2}{y} + \frac{\partial V^1}{\partial x} \right) \tag{1}$$

$$0 = \frac{2}{y^2} \left(-\frac{V^2}{y} + \frac{\partial V^2}{\partial y} \right) \tag{2}$$

$$0 = \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial V^2}{\partial x} + \frac{\partial V^1}{\partial y} \right). \tag{3}$$

Die zweite Gleichung lässt sich elementar integrieren und man erhält:

$$V^2(x, y) = yf(x),$$

wobei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine hinreichend glatte von y unabhängige Funktion ist. Einsetzen in die dritte Gleichung liefert dann

$$\frac{\partial V^2}{\partial x} = yf'(x) = -\frac{\partial V^1}{\partial y}.$$

Diese Bedingung an V^1 kann ebenfalls elementar integriert werden und liefert so

$$V^1(x, y) = -\frac{1}{2}y^2f'(x) + g(x),$$

wobei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls eine hinreichend glatte Funktion ist. Die erste Gleichung gibt nun eine Bedingung an f und g :

$$\forall y \in \mathbb{R}^+ : -f(x) - \frac{1}{2}y^2f''(x) + g'(x) = 0.$$

Differenziert man diese Gleichung zweimal nach y , erhält man $f''(x) = 0$ und damit auch $g'(x) = f(x)$. Also gilt mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ beliebig

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b \\ g(x) &= \frac{1}{2}ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

□

Folgende drei Definitionen und Sätze wurden aus [L] entnommen und bilden die Grundlage, um mit 5.13 zu zeigen, dass Integralkurven in 2-dimensionalen Riemannschen Flächen von Killing-Vektorfeldern konstante geodätische Krümmung besitzen (vergleiche 5.14).

5.9 Definition (siehe [L] Seite 231)

Seien V, W glatte Vektorfelder auf M , sowie Θ_V der zu V zugehörige Fluss. Dann ist W invariant unter Θ_V genau dann, wenn

$$d\Theta_V(p, t)(W(p)) = W(\Theta_V(p, t)), \quad \forall (p, t) \in M \times \mathbb{R}.$$

5.10 Definition (Lie-Klammer, siehe [L] Proposition 8.26)

Seien V, W glatte Vektorfelder auf M . Die Lie-Klammer von V und W wird in lokalen Koordinaten durch folgende Formel erklärt:

$$[V, W]^i = \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial W^i}{\partial x^j} V^j - \frac{\partial V^i}{\partial x^j} W^j \right).$$

5.11 Satz (siehe [L] Theorem 9.42)

Seien V, W glatte Vektorfelder auf M mit zugeordneten Flüssen Θ_V bzw. Θ_W . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $[V, W] = 0$.
2. V ist invariant unter Θ_W .
3. W ist invariant unter Θ_V .

5.12 Bemerkung

Der Beweis von Satz 5.11 basiert auf der Theorie von Lie-Ableitungen und diese müssten dafür vollständig eingeführt werden. Allerdings ist diese Theorie für den Rest der Arbeit ohne Bedeutung, weswegen hier auf einen Beweis verzichtet wird.

Die Idee des Beweises jedoch ist es zu erkennen, dass diese Lie-Ableitung der Lie-Klammer entspricht und dass Invarianz eines Vektorfeldes unter einem Fluss eine triviale Lie-Ableitung impliziert. Details können in [L] Kapitel 9, Seite 227-232 nachgelesen werden.

5.13 Hilfssatz

Sei V ein Killing-Vektorfeld auf M . Dann gilt

$$[V, \nabla_V V] = 0$$

Beweis. Sei $p \in M$ fixiert. Für diese Rechnung führt man nun Riemannsche Normalkoordinaten in p ein, siehe 2.20. In diesen Koordinaten gelten für die Christoffelsymbole in p folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_{\ell} g^{k\ell} \left(\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} \right) = 0, \\ \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^\ell} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^\ell} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^\ell} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^\ell} \right).\end{aligned}$$

Die Killing-Differentialgleichung aus 5.7 vereinfacht sich in p dann zu

$$0 = \frac{\partial V^j}{\partial x^i} + \frac{\partial V^i}{\partial x^j}.$$

Differenziert man die Killing-Bedingung 5.7, erhält man in p in diesen Koordinaten:

$$0 = \frac{\partial^2 V^j}{\partial x^i \partial x^\ell} + \frac{\partial^2 V^i}{\partial x^j \partial x^\ell} + \sum_k V^k \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^\ell}.$$

Für die kovariante Ableitung in p gilt:

$$(\nabla_V V)^\ell = \sum_n \left(\frac{\partial V^\ell}{\partial x^n} + \sum_k \Gamma_{kn}^\ell V^k \right) V^n = \sum_n \frac{\partial V^\ell}{\partial x^n} V^n.$$

Für die Koordinatenableitung der kovarianten Ableitung in p gilt weiterhin:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^m} (\nabla_V V)^\ell &= \sum_n \frac{\partial V^n}{\partial x^m} \left(\frac{\partial V^\ell}{\partial x^n} + \sum_k \Gamma_{kn}^\ell V^k \right) \\ &\quad + V^n \left(\frac{\partial^2 V^n}{\partial x^m \partial x^n} + \sum_k \left(\frac{\partial \Gamma_{kn}^\ell}{\partial x^m} V^k + \Gamma_{kn}^\ell \frac{\partial V^k}{\partial x^m} \right) \right) \\ &= \sum_n \frac{\partial V^n}{\partial x^m} \frac{\partial V^\ell}{\partial x^n} + V^n \frac{\partial^2 V^\ell}{\partial x^m \partial x^n} + V^n \sum_k \frac{\partial \Gamma_{kn}^\ell}{\partial x^m} V^k.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Lie-Klammer in p

$$[V, \nabla_V V]^j = \sum_i \left(\sum_n \frac{\partial V^n}{\partial x^i} \frac{\partial V^j}{\partial x^n} + V^n \frac{\partial^2 V^j}{\partial x^i \partial x^n} + V^n \sum_k \frac{\partial \Gamma_{kn}^j}{\partial x^i} V^k \right) V^i - \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \left(\sum_n \frac{\partial V^i}{\partial x^n} V^n \right)$$

Nun betrachtet man den ersten und den letzten Term:

$$\begin{aligned} & \sum_i \sum_n \frac{\partial V^n}{\partial x^i} \frac{\partial V^j}{\partial x^n} V^i - \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \frac{\partial V^i}{\partial x^n} V^n \\ &= \sum_i \sum_n \left(\frac{\partial V^n}{\partial x^i} \frac{\partial V^j}{\partial x^n} - \frac{\partial V^j}{\partial x^n} \frac{\partial V^n}{\partial x^i} \right) V^i = 0. \end{aligned}$$

Nun wird der Term mit den Christoffelsymbolen betrachtet und gezeigt, dass dieser identisch zum Term mit den zweiten Ableitungen von V ist, indem man erst die Christoffelsymbole in Normalkoordinaten einsetzt und danach die differenzierte Form der Killing-Gleichung benutzt.

$$\begin{aligned} & \sum_{n,i} V^n \sum_k \frac{\partial \Gamma_{kn}^j}{\partial x^i} V^k V^i \\ &= \sum_{k,n,i} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^n \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{nj}}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{kn}}{\partial x^j \partial x^i} \right) V^n V^k V^i \\ &= \sum_{k,n,i} \left(\frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^n \partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{kn}}{\partial x^j \partial x^i} \right) V^n V^k V^i \\ &= \sum_{k,n} \left(-\frac{\partial^2 V^j}{\partial x^k \partial x^n} - \frac{\partial^2 V^k}{\partial x^j \partial x^n} \right) V^n V^k + \sum_{k,n} -\frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 V^n}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 V^k}{\partial x^n \partial x^j} \right) V^n V^k \\ &= \sum_{k,n} \left(-\frac{\partial^2 V^j}{\partial x^k \partial x^n} - \frac{\partial^2 V^k}{\partial x^j \partial x^n} \right) V^n V^k + \sum_{k,n} \frac{\partial^2 V^k}{\partial x^n \partial x^j} V^n V^k \\ &= -\sum_{k,n} \frac{\partial^2 V^j}{\partial x^k \partial x^n} V^k V^n = -\sum_{i,n} \frac{\partial^2 V^j}{\partial x^i \partial x^n} V^i V^n. \end{aligned}$$

□

5.14 Satz

Sei V ein Killing-Vektorfeld auf M . Dann besitzen alle Integralkurven von V konstante geodätische Krümmung.

Beweis. Sei $p \in M$ und $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sowie Θ_V der Fluss von V , wobei $\Theta_V(\cdot, 0) = \text{id}$ auf M ist. Sei weiterhin $p' = \Theta_V(p, t)$ und $\kappa(\cdot)$ die geodätische Krümmung der Integralkurve $\Theta_V(p, \cdot)$. Die Aussage wird gezeigt, indem alle Faktoren in der Formel für die geodätische Krümmung (siehe 2.22) im Zeitpunkt t auf den Startzeitpunkt 0 zurückgeführt werden können.

(i) Mithilfe von 5.6 gilt

$$\begin{aligned} g_{\Theta_V(p,t)}(V(\Theta_V(p,t)), V(\Theta_V(p,t))) &= g_{\Theta_V(p,t)}(d\Theta_V(p,t)V(p), d\Theta_V(p,t)V(p)) \\ &= g_p(V(p), V(p)) \end{aligned}$$

(ii) Sei $N \in T_p M$ so, dass $(V(p), N)$ eine Orthogonalbasis bezüglich g bildet und N Einheitslänge besitzt. Entlang der Integralkurve $\Theta_V(p, t)$ definiert man nun das Vektorfeld $N(p') := d\Theta_V(p, t)N$. Dann gilt

$$g_{p'}(V(p'), N(p')) = g_{\Theta_V(p,t)}(d\Theta_V(p,t)V(p), d\Theta_V(p,t)N(p)) = g_p(V(p), N(p)) = 0$$

sowie

$$g_{p'}(N(p'), N(p')) = g_{\Theta_V(p,t)}(d\Theta_V(p,t)N(p), d\Theta_V(p,t)N(p)) = g_p(N(p), N(p)) = 1.$$

Deswegen bilden $(V(p'), N(p'))$ eine Orthogonalbasis von $T_{p'} M$, also kann das Vektorfeld N für die Berechnung der geodätischen Krümmung der Integralkurve genutzt werden.

(iii) Hier werden alle Ergebnisse zusammengeführt und die Aussage gezeigt. Dafür folgert man zuerst aus 5.13 und 5.11, dass $\nabla_V V$ invariant unter dem Fluss θ_V ist. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{g_{\Theta_V(p,t)}(\nabla_{V(\Theta_V(p,t))}V(\Theta_V(p,t)), N(\Theta_V(p,t)))}{g_{\Theta_V(p,t)}(V(\Theta_V(p,t)), V(\Theta_V(p,t)))} \\ &\stackrel{5.9}{=} \frac{g_{\Theta_V(p,t)}(d\Theta_V(p,t)\nabla_{V(p)}V(p), d\Theta_V(p,t)N(p))}{g_{\Theta_V(p,t)}(d\Theta_V(p,t)V(p), d\Theta_V(p,t)V(p))} \\ &= \frac{g_p(\nabla_{V(p)}V(p), N(p))}{g_p(V(p), V(p))} = \kappa(0). \end{aligned}$$

□

6 Grundlagen zu Fortsetzungen der Lösungen der Willmore-Gleichung

In Abschnitt 6.1 wird ein Vektorfeld entlang einer Lösung definiert und gezeigt, dass dieses Vektorfeld zu einem Killing-Vektorfeld auf der gesamten hyperbolischen Halbebene fortsetzbar ist. Mithilfe dieses Killing-Vektorfeldes können in Paragraph 6.4 Nichtexistenzbereiche für eine Lösung der Willmore-Gleichung gefunden werden und dies liefert dann den Beweis des Satzes 1.2.

Die Abschnitte 6.3 und 6.2 dienen in erster Linie dazu, den Paragraphen 7 vorzubereiten, indem benötigte Theorie zur hyperbolischen Halbebene zur Verfügung gestellt wird.

6.1 Ein Killing-Vektorfeld entlang einer Lösung der Willmore-Gleichung

Dieser Abschnitt basiert auf [LS1]. Die dortigen Beweiskizzen werden hier allerdings genau ausgearbeitet. Ziel ist es dabei, ein Killing-Vektorfeld bezüglich der hyperbolischen Halbebene entlang einer Profilkurve einer axialsymmetrischen Lösung der Willmore-Gleichung zu konstruieren und dies auf die gesamte Mannigfaltigkeit fortzusetzen.

Dazu sei in diesem Abschnitt M stets eine 2-dimensionale Riemannsche Fläche mit Metrik g .

6.1 Hilfssatz (siehe [LS1] Lemma 1.1)

Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \rightarrow M$ eine glatte Familie von Kurven. Hier sei der Scharparameter mit $w \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ notiert. $I \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall und $\varepsilon > 0$. Sei weiterhin $V(w, s) := \frac{\partial}{\partial s} \gamma(w, s)$, $v(w, s) := |V(w, s)|_g$, $T(w, s) := \frac{V(w, s)}{v(w, s)}$, $W(w, s) := \frac{\partial \gamma}{\partial w}(w, s)$ und $\kappa(w, s)$ die geodätische Krümmung bezüglich der s Variablen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w} &= g(\nabla_T W, T) v \\ \frac{\partial \kappa^2}{\partial w} &= 2g(\nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T) + 2g(R(W, T)T, \nabla_T T) - 4g(\nabla_T W, T) \kappa^2. \end{aligned}$$

Hierbei ist $R(\cdot, \cdot)$ der Riemannsche Krümmungstensor von M .

Beweis. Um die erste Formel nachzuweisen benötigt man folgende Hilfsrechnung:

$$\begin{aligned} (\nabla_W \dot{\gamma})^k &= \frac{\partial^2 \gamma^k}{\partial w \partial s} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i W^j = (\nabla_{\dot{\gamma}} W)^k = (\nabla_{vT} W)^k \\ &= v(\nabla_T W)^k. \end{aligned}$$

Damit gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w} &= \frac{\partial}{\partial w} (g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}))^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2v} 2g(\nabla_W \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \\ &= \frac{g(v \nabla_T W, vT)}{v} = vg(\nabla_T W, T). \end{aligned}$$

Für die zweite Formel benötigt man wieder eine Hilfsrechnung:

$$\begin{aligned}
(\nabla_W T)^k &= \frac{\partial T^k}{\partial w} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k T^i W^j \\
&= \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\dot{\gamma}^k}{v} \right) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k T^i W^j \\
&= -\frac{\dot{\gamma}^k}{v^2} \frac{\partial v}{\partial w} + \frac{1}{v} \frac{\partial^2 \gamma^k}{\partial s \partial w} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{\dot{\gamma}^i}{v} W^j \\
&= \frac{1}{v} (\nabla_{\dot{\gamma}} W)^k - \frac{1}{v^2} g(\nabla_T W, T) v \dot{\gamma}^k \\
&= (\nabla_T W)^k - g(\nabla_T W, T) T^k.
\end{aligned}$$

Nun betrachtet man die eigentliche Aussage:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \kappa^2}{\partial w} &= \frac{\partial}{\partial w} (g(\nabla_T T, \nabla_T T)) = 2g(\nabla_W \nabla_T T, \nabla_T T) \\
&\stackrel{2.15}{=} 2g(R(W, T)T + \nabla_T \nabla_W T + \nabla_{\nabla_W T} T - \nabla_{\nabla_T W} T, \nabla_T T) \\
&= 2g(R(W, T)T + \nabla_T \nabla_W T + \nabla_{-Tg(\nabla_T W, T) + \nabla_T W} T - \nabla_{\nabla_T W} T, \nabla_T T) \\
&= 2g(R(W, T)T + \nabla_T(-Tg(\nabla_T W, T) + \nabla_T W) - g(\nabla_T W, T)\nabla_T T, \nabla_T T) \\
&= 2g(R(W, T)T, \nabla_T T) - 2\kappa^2 g(\nabla_T W, T) \\
&\quad + 2g(-g(\nabla_T W, T)\nabla_T T - Tg(\nabla_T \nabla_T W, T) - Tg(\nabla_T W, \nabla_T T) + \nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T) \\
&\stackrel{2.27}{=} 2g(\nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T) - 4\kappa^2 g(\nabla_T W, T) + 2g(R(W, T)T, \nabla_T T)
\end{aligned}$$

□

6.2 Hilfssatz

Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \rightarrow M$ eine glatte Familie von Kurven mit denselben Notationen wie in 6.1. Es gelte zusätzlich, dass

$$\frac{\partial v}{\partial w} = 0 \text{ und } \frac{\partial \kappa^2}{\partial w} = 0.$$

Dann erfüllt das Vektorfeld $W(0, \cdot)$ entlang $\gamma(0, \cdot)$ eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung, dessen Lösungsraum dreidimensional ist.

Beweis. Seien $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}$ glatte Funktionen, sodass $W(0, s) = \alpha(s)T(0, s) + \beta(s)N(0, s)$. Dann gilt mit 6.1 und den Frenet-Gleichungen

$$\begin{aligned}
0 &= g(\nabla_T W, T) = g(\nabla_T(\alpha T + \beta N), T) \\
&= g(\alpha' T + \alpha \nabla_T T + \beta' N + \beta \nabla_T N, T) \\
&= \alpha' - \kappa \beta.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\nabla_T \nabla_T W &= \alpha'' T + 2\alpha' \nabla_T T + \alpha \nabla_T \nabla_T T \\
&\quad + \beta'' N + 2\beta' \nabla_T N + \beta \nabla_T \nabla_T N \\
&= \alpha'' T + 2\alpha' \nabla_T T + \alpha(\kappa' N + \kappa \nabla_T N) \\
&\quad + \beta'' N + 2\beta' \nabla_T N + \beta(-\kappa \nabla_T T - \kappa' T).
\end{aligned}$$

Dies impliziert wieder mit 6.1, 2.19 und G der Gauß-Krümmung von M , dass

$$\begin{aligned} 0 &= g(\nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T) + Gg(g(T, T)W - g(T, W)T, \nabla_T T) \\ &= 2\alpha' \kappa^2 + \kappa \beta'' + \alpha \kappa \kappa' - \beta \kappa^3 + G\beta \kappa. \end{aligned}$$

Setzt man $\phi = \beta'$ erhält man folgendes System von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \phi' &= -\beta \kappa^2 - \alpha \kappa' - G\beta \\ \alpha' &= \kappa \beta \\ \beta' &= \phi \end{cases}$$

□

6.3 Hilfssatz

Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \rightarrow M$ eine glatte Familie von Kurven mit denselben Notationen wie in 6.1. Sei zusätzlich das Vektorfeld W ein Killing-Vektorfeld. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w} &= 0 \\ \frac{\partial \kappa^2}{\partial w} &= 0. \end{aligned}$$

Beweis. Sei $p \in M$ fixiert aber beliebig. Für den gesamten Beweis führt man Riemannsche Normalkoordinaten in p ein. In dem Beweis von 5.13 können die dadurch entstanden Transformationen der Killing-Bedingung und der Christoffelsymbole nachgelesen werden. Für die erste Aussage genügt es mithilfe von 6.1 folgende Rechnung durchzuführen:

$$\begin{aligned} g(\nabla_T W, T) &= \sum_{i,j} \frac{\partial W^i}{\partial x^j} T^j T^i = - \sum_{i,j} \frac{\partial W^j}{\partial x^i} T^j T^i \\ &\stackrel{i \leftrightarrow j}{=} - \sum_{i,j} \frac{\partial W^i}{\partial x^j} T^i T^j = -g(\nabla_T W, T). \end{aligned}$$

Also muss $g(\nabla_T W, T) = 0$ sein. Für die zweite Formel wendet man wieder 6.1 an, nutzt hier zusätzlich 2.19 und das obige Ergebnis. Sei hier die Gauß-Krümmung von M mit G bezeichnet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa^2}{\partial w} &= 2g(\nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T) + 2g(R(W, T)T, \nabla_T T) - 4g(\nabla_T W, T) \kappa^2 \\ &= 2g(\nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T) + 2Gg(g(T, T)W - g(W, T)T, \nabla_T T) \\ &= 2g(\nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T) + 2Gg(W, \nabla_T T). \end{aligned}$$

Die kovarianten Ableitungen von W berechnen sich in diesen Koordinaten in p zu:

$$\begin{aligned} (\nabla_T W)^i &= \sum_j \left(\frac{\partial W^i}{\partial x^j} T^j + \sum_k \Gamma_{kj}^i W^k T^j \right) = \sum_j \frac{\partial W^i}{\partial x^j} T^j \\ (\nabla_T \nabla_T W)^m &= \sum_\ell \left(\frac{\partial}{\partial x^\ell} \left(\sum_j \frac{\partial W^m}{\partial x^j} T^j + \sum_k \Gamma_{kj}^m W^k T^j \right) \right) T^\ell \\ &= \sum_\ell \left(\sum_j \left(\frac{\partial^2 W^m}{\partial x^j \partial x^\ell} T^j T^\ell + \frac{\partial W^m}{\partial x^j} \frac{\partial T^j}{\partial x^\ell} T^\ell + \sum_k \frac{\partial \Gamma_{kj}^m}{\partial x^\ell} T^\ell W^k T^j \right) \right) \end{aligned}$$

Der dritte Term berechnet sich mithilfe von $R_{ijk}^\ell = \frac{\partial \Gamma_{kj}^\ell}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^\ell}{\partial x^j}$ (siehe 2.16 in Riemannschen Normalkoordinaten) und den durchdifferenzierten Killing-Differentialgleichungen (siehe 5.7 in Riemannschen Normalkoordinaten) in p zu:

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell,k,j} \frac{\partial \Gamma_{kj}^m}{\partial x^\ell} W^k T^j T^\ell &= \sum_{\ell,k,j} \left(R_{\ell kj}^m + \frac{\partial \Gamma_{j\ell}^m}{\partial x^k} \right) W^k T^j T^\ell \\
&= \sum_{\ell,k,j} R_{\ell kj}^m W^k T^j T^\ell \\
&\quad + \sum_{\ell,k,j} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{jm}}{\partial x^\ell \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{\ell m}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{j\ell}}{\partial x^m \partial x^k} \right) W^k T^j T^\ell \\
&= G \sum_{\ell,k,j} (g_{kj} \delta_\ell^m - g_{\ell j} \delta_k^m) W^k T^j T^\ell \\
&\quad + \sum_{\ell,j} \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 W^j}{\partial x^m \partial x^\ell} - \frac{\partial^2 W^m}{\partial x^j \partial x^\ell} - \frac{\partial^2 W^\ell}{\partial x^m \partial x^j} - \frac{\partial^2 W^m}{\partial x^\ell \partial x^j} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 W^j}{\partial x^\ell \partial x^m} + \frac{\partial^2 W^\ell}{\partial x^j \partial x^m} \right) T^j T^\ell \\
&= G (g(W, T) T^m - g(T, T) W^m) - \sum_{\ell,j} \frac{\partial^2 W^m}{\partial x^j \partial x^\ell} T^j T^\ell \\
&= G (g(W, T) T^m - W^m) - \sum_{\ell,j} \frac{\partial^2 W^m}{\partial x^j \partial x^\ell} T^j T^\ell
\end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich $g(\nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T)$ mithilfe der Frenet-Gleichungen zu:

$$\begin{aligned}
g(\nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T) &= -Gg(W, \nabla_T T) + \sum_m \left(\sum_{j,\ell} \left(\frac{\partial^2 W^m}{\partial x^j \partial x^\ell} T^j T^\ell + \frac{\partial W^m}{\partial x^j} \frac{\partial T^j}{\partial x^\ell} T^\ell \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{\ell,j} \frac{\partial^2 W^m}{\partial x^j \partial x^\ell} T^j T^\ell \right) \right) \left(\sum_i \frac{\partial T^m}{\partial x^i} T^i \right) \\
&= -Gg(W, \nabla_T T) + \sum_{j,i,\ell,m} \frac{\partial W^m}{\partial x^j} \frac{\partial T^j}{\partial x^\ell} T^\ell \frac{\partial T^m}{\partial x^i} T^i
\end{aligned}$$

Der zweite Term vereinfacht sich mithilfe der Killing-Bedingung zu:

$$\begin{aligned}
\sum_{j,i,\ell,m} \frac{\partial W^m}{\partial x^j} \frac{\partial T^j}{\partial x^\ell} T^\ell \frac{\partial T^m}{\partial x^i} T^i &= - \sum_{j,i,\ell,m} \frac{\partial W^j}{\partial x^m} \frac{\partial T^j}{\partial x^\ell} T^\ell \frac{\partial T^m}{\partial x^i} T^i \\
&\stackrel{m \leftrightarrow j}{=} - \sum_{j,i,\ell,m} \frac{\partial W^m}{\partial x^j} \frac{\partial T^m}{\partial x^\ell} T^\ell \frac{\partial T^j}{\partial x^i} T^i \\
&\stackrel{\ell \leftrightarrow i}{=} - \sum_{j,i,\ell,m} \frac{\partial W^m}{\partial x^j} \frac{\partial T^j}{\partial x^\ell} T^\ell \frac{\partial T^m}{\partial x^i} T^i
\end{aligned}$$

Also ist dieser Term gleich 0. Also gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \kappa^2}{\partial w} &= 2g(\nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T) + 2Gg(W, \nabla_T T) \\
&= -2Gg(W, \nabla_T T) + 2Gg(W, \nabla_T T) = 0.
\end{aligned}$$

□

6.4 Satz (siehe [LS1] Proposition 2.1)

Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ eine reguläre, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, dessen Krümmung K Lösung der Differentialgleichung (KODE) ist. Sei T das Tangentialvektorfeld entlang γ und N das Einheitsnormalenvektorfeld zu T , mit dem K definiert wurde. Dann lässt sich das Vektorfeld

$$J_\gamma = K^2 T + 2 \frac{dK}{ds} N$$

entlang γ zu einem eindeutigen Killing-Vektorfeld nach \mathbb{H}^2 fortsetzen.

Beweis. Zuerst bemerkt man die Wohldefiniertheit des Vektorfeldes J_γ unter Wechsel der Normale N . Da \mathbb{H}^2 Dimension zwei besitzt, ändert sich bei einem Wechsel zu einem anderen Normalenvektorfeld lediglich das Vorzeichen von N und damit sofort auch von K .

Man führt für die Kurve γ folgende Variation in Richtung J_γ ein und nutzt nun die Notationen aus 6.1:

$$\begin{aligned}
\gamma &: (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \rightarrow \mathbb{H}^2 \\
(w, s) &\mapsto \gamma(w, s) := \gamma(s) + w J_\gamma(s)
\end{aligned}$$

Für J_γ gilt folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen für $w = 0$

$$\frac{\partial v}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial K^2}{\partial w} = 0, \quad (*)$$

denn mit 6.1 gilt in $w = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial w} &= g(\nabla_T J_\gamma, T) v \\
&= g \left(2K \frac{\partial K}{\partial s} T + K^2 \nabla_T T + 2 \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} N + 2 \frac{\partial K}{\partial s} \nabla_T N, T \right) v \\
&= \left(2K \frac{\partial K}{\partial s} - 2K \frac{\partial K}{\partial s} \right) v = 0.
\end{aligned}$$

Mit 2.19 und mit -1 als der Gauß-Krümmung von \mathbb{H}^2 (vergleiche [B] Seite 221 und 240) gilt weiterhin

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K^2}{\partial w} &= 2g(\nabla_T \nabla_T J_\gamma, \nabla_T T) + 2g(R(J_\gamma, T)T, \nabla_T T) \\
&\stackrel{2.27}{=} 2g \left(\nabla_T \left(2K \frac{\partial K}{\partial s} T + K^2 \nabla_T T + 2 \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} N - 2 \frac{\partial K}{\partial s} \nabla_T N \right), \nabla_T T \right) \\
&\quad - 2g(g(T, T)J_\gamma - g(J_\gamma, T)T, \nabla_T T) \\
&= 2g \left(2 \left(\frac{\partial K}{\partial s} \right)^2 T + 2K \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} T + 2K \frac{\partial K}{\partial s} \nabla_T T \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3K^2 \frac{\partial K}{\partial s} N + K^3 \nabla_T N \\
& +2 \frac{\partial^3 K}{\partial s^3} N + 2 \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \nabla_T N \\
& -2 \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} K T - 2 \left(\frac{\partial K}{\partial s} \right)^2 T - 2 \frac{\partial K}{\partial s} K \nabla_T T, \nabla_T T \\
& -2g(J_\gamma - g(J_\gamma, T)T, \nabla_T T) \\
\stackrel{2.27}{=} & 2 \left(3K^3 \frac{\partial K}{\partial s} + 2K \frac{\partial^3 K}{\partial s^3} \right) - 4 \frac{\partial K}{\partial s} K \\
= & 6K^3 \frac{\partial K}{\partial s} + 4K \frac{\partial^3 K}{\partial s^3} - 4 \frac{\partial K}{\partial s} K \\
\stackrel{(KODE)}{=} & 6K^3 \frac{\partial K}{\partial s} + 4K \left(\frac{\partial K}{\partial s} - \frac{3}{2} K^2 \frac{\partial K}{\partial s} \right) - 4 \frac{\partial K}{\partial s} K = 0.
\end{aligned}$$

(*) bildet für J_γ mithilfe von 6.2 einen 3-dimensionalen Lösungsraum einer gewöhnlichen Differentialgleichung für J_γ entlang γ . Außerdem gilt (*) mithilfe von 6.3 für alle Killing-Vektorfelder eingeschränkt auf γ . Mit 5.8 erhält man, dass die Dimension aller Lösungen der Killing-Bedingungen in \mathbb{H}^2 ebenfalls Drei ist. Es bleibt also noch zu zeigen, dass die Vektorfelder aus 5.8 auch eingeschränkt auf eine Kurve linear unabhängig sind, denn damit existiert dann ein eindeutiges Killing-Vektorfeld, das eingeschränkt auf γ gleich J_γ ist.

Sei also $z(t) = (x(t), y(t))$ eine reguläre Kurve in \mathbb{H}^2 . Angenommen entlang von z sind die drei Vektorfelder aus 5.8 linear abhängig, dann existieren nichttriviale Faktoren a, b, c , sodass gilt:

$$0 = a \begin{pmatrix} \frac{x^2 - y^2}{2} \\ xy \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also gilt, dass

$$0 = axy + by = y(ax + b).$$

Da $y = 0 \notin \mathbb{H}^2$ muss $x(t)$ eine konstante Funktion sein oder $a, b = 0$. Letzteres wäre mit der anderen Gleichung allerdings bereits ein Widerspruch. Aus der anderen Gleichung folgt damit wiederum

$$0 = a \frac{x^2 - y^2}{2} + bx + c = a \frac{x^2 - y^2}{2} - ax^2 + c = -a \frac{x^2 + y^2}{2} + c.$$

Dies impliziert aber mit $a \neq 0$

$$y^2 = \frac{c}{2a} - x^2,$$

womit $y(t)$ ebenfalls eine konstante Funktion ist. Dies bedeutet, dass die Kurve z nicht regulär ist, also ein Widerspruch. \square

6.5 Satz (siehe [LS1] Proposition 2.2)

Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, dessen Krümmung K Lösung von (KODE) ist. Sei außerdem J das konstruierte zugehörige Killing-Vektorfeld aus 6.4. Sei weiterhin $t_0 \in I$ so gewählt, dass $K(t_0)$ kritisch für K ist. Dann besitzt die Integralkurve Σ von J durch $\gamma(t_0)$ folgende konstante geodätische Krümmung:

$$\kappa_\Sigma = \frac{2}{K(t_0)}.$$

Beweis. Mit Satz 5.14 reicht es die Formel in Punkt $\gamma(t_0)$ nachzuweisen. Bei einem kritischen Punkt der Krümmung gilt, dass $\frac{dK}{ds} = 0$ ist, damit ist J_γ parallel zu γ . Also kann γ genutzt werden, um mithilfe von 2.10 die kovariante Ableitung von J_γ zu sich selbst zu berechnen. Also gilt mit den Notationen aus 6.4 und mit der geodätischen Krümmung κ_Σ von Σ in $\gamma(t_0)$:

$$\begin{aligned}
\kappa_\Sigma &= \frac{g(\nabla_{J_\gamma} J_\gamma, N)}{g(J_\gamma, J_\gamma)} \\
&= \frac{g(\nabla_{(K(t_0))^2 T} (K^2 T + 2\frac{dK}{ds} N), N)}{(K(t_0))^4} \\
&= \frac{1}{(K(t_0))^4} (K(t_0))^2 g\left(2K(t_0)\frac{dK}{ds}(t_0)T + (K(t_0))^2 \nabla_T T \right. \\
&\quad \left. + 2\frac{d^2 K}{ds^2}(t_0)N + 2\frac{dK}{ds}(t_0)\nabla_T N, N\right) \\
&= \frac{1}{(K(t_0))^2} \left((K(t_0))^3 + 2\frac{d^2 K}{ds^2}(t_0) \right) \\
&\stackrel{\text{(KODE)}}{=} \frac{2K(t_0)}{(K(t_0))^2} = \frac{2}{K(t_0)}
\end{aligned}$$

Die Konstanz der Krümmung folgt aus 5.14 und damit die Aussage. \square

6.2 Moebius-Transformationen in \mathbb{H}^2

In diesem Abschnitt werden Moebius-Transformationen untersucht, die die obere Halbebene invariant lassen. Dies dient dazu Paragraph 7 vorzubereiten, denn dort wird ein Anfangswertproblem für die Frenet-Gleichungen in Kombination von (KODE) für die Krümmung untersucht. Um die Gesamtheit aller Lösungen betrachten zu können, wird mit den folgenden Sätzen ein beliebiges Anfangswertproblem auf eine spezielle Situation zurückgeführt.

6.6 Satz

Sei ϕ eine Inversion in \mathbb{R}^2 gemäß 2.28, sodass $\phi(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$. Dann ist ϕ längentreu bezüglich der hyperbolischen Metrik, konform und orientierungsumkehrend.

Beweis.

- (i) Sei ϕ eine Inversion an einem Kreis. Damit ϕ die obere Halbebene invariant lässt, muss der Mittelpunkt dieses Kreises auf der x -Achse liegen. Dies impliziert, dass $\exists r > 0, m \in \mathbb{R}$, sodass

$$\phi(x, y) = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{r^2}{(x-m)^2 + y^2} \begin{pmatrix} x-m \\ y \end{pmatrix}.$$

Die Jacobi-Matrix berechnet sich dann zu

$$D\phi(x, y) = \frac{r^2}{((x-m)^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} y^2 - (x-m)^2 & -2(x-m)y \\ -2y(x-m) & -y^2 + (x-m)^2 \end{pmatrix}.$$

Dies impliziert sofort die Konformität von ϕ . Für die Orientierung berechnet man nun die Determinante der Jacobi-Matrix

$$\det D\phi(x, y) = \left(\frac{r^2}{((x-m)^2 + y^2)^2} \right)^2 \left(-(y^2 - (x-m)^2)^2 - (2y(x-m))^2 \right) < 0.$$

Für die Längentreue sei nun $p := (x, y) \in \mathbb{H}^2$ und $V \in T_p\mathbb{H}^2$. Da das Differential linear ist, genügt es für das Folgende o.B.d.A. $|V|_g = 1$ anzunehmen. Hierbei ist g die hyperbolische Metrik von \mathbb{H}^2 . Dann gilt

$$\begin{aligned} |d\phi(x, y)V|_g^2 &= \frac{1}{(\phi^2)^2} \frac{r^4}{((x-m)^2 + y^2)^4} \left(((y^2 - (x-m)^2)V^1 - 2(x-m)yV^2)^2 \right. \\ &\quad \left. + (-2y(x-m)V^1 - (y^2 - (x-m)^2)V^2)^2 \right) \\ &= \frac{1}{y^2((x-m)^2 + y^2)^2} \left((y^2 - (x-m)^2)^2((V^1)^2 + (V^2)^2) \right. \\ &\quad \left. + (2(x-m)y)^2((V^1)^2 + (V^2)^2) \right) \\ &\stackrel{|V|_g=1}{=} \frac{1}{((x-m)^2 + y^2)^2} ((y^2 + (x-m)^2)^2) = 1. \end{aligned}$$

- (ii) Sei nun ϕ eine Inversion an einer Geraden. Diese Gerade muss senkrecht auf der x -Achse stehen, damit die Invarianz bezüglich der oberen Halbebene gegeben ist. Dies impliziert, dass ein $t \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\phi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(t-x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt für die Jacobi-Matrix und dessen Determinante

$$D\phi(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(D\phi) = -1.$$

Dies zeigt die Konformität und die Orientierungsumkehr. Für die Längentreue sei wie oben $p = (x, y) \in \mathbb{H}^2$ und $V \in T_p\mathbb{H}^2$ mit $|V|_g = 1$. Dann

$$|d\Phi(p)V|_g^2 = \frac{1}{y^2} ((V^1)^2 + (V^2)^2) = 1.$$

□

6.7 Satz

Sei $p \in \mathbb{H}^2$ und $V \in T_p\mathbb{H}^2$ mit $|V|_g = 1$. Dann existiert eine Moebius-Transformation Φ in \mathbb{R}^2 mit $\Phi(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$ und ein $z > 0$, sodass gilt

$$\Phi(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad d\Phi(p)(V) = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Sei $(x, y) := p$ und $\phi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ eine Inversion an einem Kreis mit Mittelpunkt $(m, 0)$ und Radius 1 definiert durch

$$\phi(x, y) := \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(x-m)^2 + y^2} \begin{pmatrix} x-m \\ y \end{pmatrix}.$$

Ziel ist es nun, ein $m \in \mathbb{R}$ so zu bestimmen, dass $d\phi(p)(V)$ parallel zur x -Achse ist. Hier kann das Differential einfach über die Jacobi-Matrix berechnet werden:

$$d\phi(x, y) = \frac{1}{((x-m)^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} y^2 - (x-m)^2 & -2(x-m)y \\ -2y(x-m) & (x-m)^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$(d\phi(x, y)(V))^2 = \frac{1}{((x-m)^2 + y^2)^2} (-2y(x-m)V^1 + ((x-m)^2 - y^2)V^2) \stackrel{!}{=} 0.$$

Mit diesem Ansatz gilt mithilfe der p-q-Formel und o.B.d.A. $V^2 \neq 0$

$$\begin{aligned} -2y(x-m)V^1 + ((x-m)^2 - y^2)V^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-m)^2 - 2y \frac{V^1}{V^2} (x-m) - y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-m)_{1/2} &= y \frac{V^1}{V^2} \pm \sqrt{y^2 \left(\frac{V^1}{V^2}\right)^2 + y^2} \stackrel{|V|_g=1}{=} y \frac{V^1}{V^2} \pm \frac{y^2}{V^2}. \end{aligned}$$

Dies impliziert, dass sogar zwei Wahlmöglichkeiten für m existieren.

Für das Folgende kann man nun o.B.d.A. davon ausgehen, dass V parallel zur x -Achse ist und mit 6.6 Einheitslänge besitzt. Nach einer Translation in x -Richtung, welche nach 5.8 eine Isometrie und nach 2.31 eine Moebius-Transformation ist, kann weiterhin davon ausgegangen werden, dass ein $z > 0$ existiert, sodass $p = (0, z)$ und $V = (0, \pm z)$. Eine mögliche Spiegelung an der x -Achse erreicht nun, dass $V = (0, z)$ angenommen werden kann. Komponiert man nun alle genannten Transformationen, erhält man die gesuchte Moebius-Transformation Φ . Die Längentreue wird durch 6.6 gesichert. \square

6.8 Satz

Sei $L > 0$ und $c : [0, L] \rightarrow \mathbb{H}^2$ eine reguläre Kurve. Sei ferner Φ eine Moebius-Transformation von \mathbb{R}^2 , für die gilt, dass $\Phi(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$. Sei außerdem κ die geodätische Krümmung von c und κ_Φ die geodätische Krümmung von $\Phi \circ c$. Dann gilt

$$|\kappa| = |\kappa_\Phi|.$$

Beweis. Seien $t_1, t_2 \in [0, L]$ mit $t_1 < t_2$. Dann gilt mit 3.11

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \kappa^2(s) g_{c(s)}(\dot{c}(s), \dot{c}(s)) ds &= \int_{t_1}^{t_2} \kappa_\Phi^2(s) g_{\Phi(c(s))}(D\Phi \dot{c}(s), D\Phi \dot{c}(s)) ds \\ \stackrel{6.6}{\Rightarrow} \int_{t_1}^{t_2} \kappa^2(s) g_{c(s)}(\dot{c}(s), \dot{c}(s)) ds &= \int_{t_1}^{t_2} \kappa_\Phi^2(s) g_{c(s)}(\dot{c}(s), \dot{c}(s)) ds \\ \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} (\kappa^2(s) - \kappa_\Phi^2(s)) g_{c(s)}(\dot{c}(s), \dot{c}(s)) ds &= 0. \end{aligned}$$

Da $t_1 < t_2$ beliebig, die Krümmungen stetige Funktionen sind und c regulär ist, gilt

$$\kappa^2 = \kappa_\Phi^2.$$

\square

6.3 Kurven konstanter Krümmung in der hyperbolischen Halbebene

Satz 6.5 in Kombination mit Satz 5.14 motiviert folgende Untersuchung von Kurven konstanter Krümmung in der hyperbolischen Halbebene \mathbb{H}^2 , um so alle Integralkurven des fortgesetzten Killing-Vektorfeldes von 6.4 zu erhalten.

Dabei stammt die Idee euklidischen Kreise und Geraden zu untersuchen, um diese Integralkurven zu finden, aus [Bo] Kapitel 3. Allerdings werden dort keine Formeln zur Krümmung im Zusammenhang zu Mittelpunkt, Radius und Steigung der Kurven wie hier gegeben.

Das erste Beispiel beschreibt eine euklidische Gerade und ihre Krümmung in \mathbb{H}^2 .

6.9 Beispiel

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und

$$C_G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

eine Gerade. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sodass $C_G(I) \subset \mathbb{H}^2$. Dann besitzt die Kurve $C_G(I)$ in \mathbb{H}^2 die geodätische Krümmung

$$\kappa_G(t) = \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}}.$$

Diese ist unabhängig von t , somit konstant.

Beweis. Sei N die Einheitsnormale von C_G wie in 3.6, dann gilt:

$$\begin{aligned} \dot{C}_G &= \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ \ddot{C}_G &= 0 \\ N &= \frac{1}{|\dot{C}_G|_g} \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix} = \frac{dt + b}{\sqrt{c^2 + d^2}} \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit 3.6 berechnet sich die kovariante Ableitung zu:

$$\nabla_{\dot{C}_G} \dot{C}_G = \left(-\frac{2cd}{b + td} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{d^2}{b + td} + \frac{c^2}{b + td} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit berechnet sie die geodätische Krümmung zu:

$$\begin{aligned} \kappa_G(t) &= \frac{g(\nabla_{\dot{C}_G} \dot{C}_G, N)}{g(\dot{C}_G, \dot{C}_G)} \\ &= (2cd^2 - cd^2 + c^3) \frac{b + td}{\sqrt{d^2 + c^2} (b + td)^3} \frac{(b + td)^2}{d^2 + c^2} \\ &= \frac{c(d^2 + c^2)}{d^2 + c^2} \frac{1}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}}. \end{aligned}$$

□

Das zweite Beispiel beschreibt einen euklidischen Kreis in \mathbb{H}^2 und auch hier wird die entsprechende Krümmung bezüglich \mathbb{H}^2 berechnet:

6.10 Beispiel

Sei $r > 0$ und $M \in \mathbb{R}^2$, sodass der euklidische Kreis $\partial S(M, r)$ einen nichtleeren Schnitt mit der oberen Halbebene \mathbb{H}^2 besitzt. Dieser Kreis wird durch

$$C_{r,M} := r \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M^1 \\ M^2 \end{pmatrix}$$

parametrisiert und besitzt in der hyperbolischen Halbebene die geodätische Krümmung

$$\kappa_C = -\frac{M^2}{r}.$$

Beweis. Sei N die Einheitsnormale von $C_{r,M}$ wie in 3.6. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \dot{C}_{r,M} &= r \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \\ \ddot{C}_{r,M} &= -r \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ N &= \frac{r}{|\dot{C}_{r,M}|_g} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = (r \cos t + M^2) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wie in 6.9 berechnet man die kovariante Ableitung mithilfe von 3.6:

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{C}_{r,M}} \dot{C}_{r,M} &= \begin{pmatrix} -r \sin t + 2 \frac{r^2 \cos t \sin t}{r \cos t + M^2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} -r \cos t - \frac{r^2 \sin^2 t}{r \cos t + M^2} + \frac{r^2 \cos^2 t}{r \cos t + M^2} \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also ergibt

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\dot{C}_{r,M}} \dot{C}_{r,M}, N) &= \frac{r \cos t + M^2}{(r \cos t + M^2)^2} \left(-r \sin^2 t + 2 \frac{r^2 \cos t \sin^2 t}{r \cos t + M^2} \right. \\ &\quad \left. - r \cos^2 t - \frac{r^2 \cos t \sin^2 t}{r \cos t + M^2} + \frac{r^2 \cos^3 t}{r \cos t + M^2} \right) \\ &= \frac{1}{r \cos t + M^2} \left(-r + \frac{r^2 \cos t \sin^2 t}{r \cos t + M^2} + \frac{r^2 \cos^3 t}{r \cos t + M^2} \right) \\ &= \frac{1}{r \cos t + M^2} \left(-r + \frac{r^2 \cos t}{r \cos t + M^2} \right) \\ &= \frac{1}{r \cos t + M^2} \frac{-r^2 \cos t - rM^2 + r^2 \cos t}{r \cos t + M^2} = -\frac{rM^2}{(r \cos t + M^2)^2}. \end{aligned}$$

Mit

$$g(\dot{C}_{r,M}, \dot{C}_{r,M}) = \frac{r^2}{(r \cos t + M^2)^2}$$

und 2.22 folgt die Aussage. □

6.11 Satz

Sei $\kappa \in \mathbb{R}$ konstant. Dann ist die zugehörige Kurve zu der geodätischen Krümmung κ bezüglich der hyperbolischen Halbebene entweder ein euklidischer Kreis oder eine euklidische Gerade in \mathbb{H}^2 .

Beweis. Für diesen Beweis ist die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage der Frenet-Gleichungen zentral (siehe 2.27). Sei also $p \in \mathbb{H}^2$ und $V \in T_p\mathbb{H}^2$ mit $|V|_g = 1$ beliebig aber fixiert. Dann existiert nach 6.7 eine Moebius-Transformation Φ der oberen Halbebene und $z > 0$, so dass $d\Phi(p)(V) = (z, 0)$ und $\Phi(p) = (0, z)$. Nach 6.8 ändert Φ höchstens das Vorzeichen der Krümmung einer regulären Kurve, also kann o.B.d.A. von folgendem Anfangswertproblem ausgegangen werden:

$$\begin{cases} \nabla_{\dot{c}}\dot{c} = \kappa N, & \nabla_{\dot{c}}N = -\kappa\dot{c} \\ c(0) = (0, z), & \dot{c}(0) = (z, 0), \end{cases}$$

wobei c die gesuchte Kurve mit konstanter Krümmung κ ist und N die wie in 3.6 definierte zugehörige Normale. Im Folgenden werden Fälle für unterschiedliche κ betrachtet. In diesen Betrachtungen ist m stets die zweite Komponente eines Mittelpunktes eines Kreises und r der dazugehörige Radius. Der Mittelpunkt wird durch $(0, m)$ gegeben.

(i) $\kappa > 1$: Man definiere

$$m := z + \frac{z}{\kappa - 1} = z \frac{\kappa}{\kappa - 1}, \quad r := \frac{z}{\kappa - 1} > 0.$$

Für diesen Fall parametrisiere man den Kreis entgegengesetzt zur Laufrichtung aus 6.10. Dann gilt:

$$m - r = z, \quad \frac{m}{r} = \kappa.$$

Man befindet sich bei $(0, z)$ also im 'Südpol' des so definierten Kreises. Die Tangente an diesem Punkt ist wegen der so gewählten Laufrichtung ein positives Vielfaches von $(z, 0)$.

(ii) $\kappa = 1$: Man parametrisiere eine Gerade c_G durch

$$c_G(t) = (0, z) + t(z, 0).$$

Diese erfüllt die Anfangsdaten und ihre Krümmung ist nach 6.9 gleich κ .

(iii) $\kappa < 1$: Hier definiere man

$$m := z - \frac{z}{1 - \kappa} = -\kappa \frac{z}{1 - \kappa}, \quad r := \frac{z}{1 - \kappa} > 0.$$

Dann gilt:

$$m + r = z, \quad -\frac{m}{r} = \kappa.$$

Also befindet man sich bei $(0, z)$ im 'Nordpol' des Kreises und nutzt man nun die Laufrichtung aus 6.10, erfüllt dieser Kreis das obige Anfangswertproblem.

□

6.12 Bemerkung (siehe [Bo] Kapitel 3)

Fasst man die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammen, erhält man folgende Übersicht über mögliche Kurven konstanter Krümmung in der hyperbolischen Halbebene. Sei dazu κ die konstante Krümmung der Kurve c :

- (i) $|\kappa| \in [0, 1)$: Dies bedeutet, dass c entweder ein Kreis ist, welcher die x -Achse an zwei verschiedenen Punkten schneidet, oder eine Gerade welche nicht parallel zur x -Achse ist.
- (ii) $|\kappa| = 1$: c ist in diesem Fall ein Kreis, welcher die x -Achse an genau einem Punkt schneidet, oder eine Gerade parallel zur x -Achse.
- (iii) $|\kappa| > 1$: Hier ist c ein euklidischer Kreis, welcher vollständig in der oberen Halbebene liegt.

6.4 Nichtperiodische Fortsetzbarkeit der Lösung der Willmore-Gleichung

Dieser Paragraph dient dazu, die vorherige Ergebnisse zusammenzutragen, um damit den Beweis des Hauptsatzes 1.2 zu führen. Man nimmt dazu an, es existiere eine periodische Lösung von 3.12, um dann einen Nichtexistenzbereich zu konstruieren, indem man die Länge des angelegten Killing-Vektorfeldes (siehe 6.4) mit der Länge eines Killing-Vektorfeldes auf der gesamten Mannigfaltigkeit vergleicht.

Beweis von 1.2 Angenommen es existiert eine periodische Profilkurve $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, sodass die zugehörige axialsymmetrische Fläche $S(u)$ die Willmore-Gleichung (Willmore) erfüllt. Also muss u auch eine Lösung von 3.12 in der hyperbolischen Halbebene \mathbb{H}^2 sein. Parametrisiert man die Kurve $(x, u(x))$ nun nach der Bogenlänge und nennt diese Kurve γ , so erhält man die Differentialgleichung (KODE) für die geodätische Krümmung K von γ . Sei $T := \dot{\gamma}$ und N die zugehörige Normale wie in 3.6. Dann kann das Vektorfeld J_γ aus 6.4 an γ angelegt und zu dem Killing-Vektorfeld J bezüglich der hyperbolischen Metrik fortgesetzt werden.

- (i) Die Periodizität von u sichert, dass γ in einem Streifen $\mathbb{R} \times [y_0, y_1]$ liegt, sodass $0 < y_0 \leq y_1$. Siehe auch

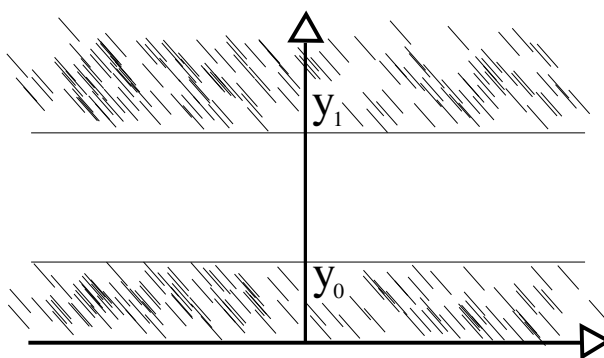


Abbildung 4: Nichtexistenzbereich von γ mithilfe der Periodizität von u

- (ii) Nun wird die Länge des angelegten Killing-Vektorfeldes J_γ betrachtet. Sei hierfür K_0 so gewählt, dass K_0^2 ein Maximum von K^2 ist (Existenz wird durch die Diskussion

in Paragraph 4, insbesondere Satz 4.15, gesichert). Damit gilt 4.1 mit K_0 , sodass der Ableitungsterm K'_0 verschwindet:

$$\begin{aligned} g(J_\gamma, J_\gamma) &= g\left(K^2T + 2\frac{dK}{ds}N, K^2T + 2\frac{dK}{ds}N\right) \\ &= K^4 + 4\left(\frac{dK}{ds}\right)^2 \stackrel{4.1}{=} 4K^2 - 4K_0^2 + K_0^4 \\ &\leq K_0^4. \end{aligned}$$

Damit ist die Länge dieses Vektorfeldes entlang von γ beschränkt.

(iii) J besitzt eine Darstellung wie in 5.8 mit fixierten Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann ist die Länge von J bezüglich \mathbb{H}^2 wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} g(J, J) &= \frac{(J^1)^2(x, y) + (J^2)^2(x, y)}{y^2} \\ &= \frac{\left(-\frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{2}ax^2 + bx + c\right)^2 + y^2(ax+b)^2}{y^2} \end{aligned} \quad (+)$$

- Für $a = b = 0$ ist J parallel zur x -Achse, somit besitzen nach 6.9 alle Integralkurven von J geodätische Krümmung von ± 1 . Dies impliziert mit 6.5, dass $K_0 = \pm 2$ ist, denn dort ist J wegen der Maximalität von K_0 parallel zu γ . Also gilt nach 4.4, dass die Krümmung $K(s) = \pm \frac{2}{\cosh s}$ ist, welche nicht periodisch und dank der Asymptotik auch nicht durch eine Umparametrisierung zu einer periodischen Funktion transformierbar ist. Dies bedeutet, dass dieser Fall für den hiesigen Beweis ohne Bedeutung ist.
- Für eine andere Belegung der Variablen a und b gilt, dass die Länge von J für festes y ein Polynom vierten/zweiten Grades mit positivem Vorfaktor vor dem Monom mit dem höchsten Exponenten in x ist. Also gilt:

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow g(J(x, y), J(x, y)) \rightarrow \infty.$$

(iv) Insgesamt folgt aus (i) und (iii), dass $g(J, J)(x, y)$ für $x \rightarrow \pm\infty, \forall y \in [y_0, y_1]$ nach unendlich divergiert. Damit existieren mit (ii) Schranken $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, sodass $\gamma(\mathbb{R}) \subset [x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$ ist, siehe auch:

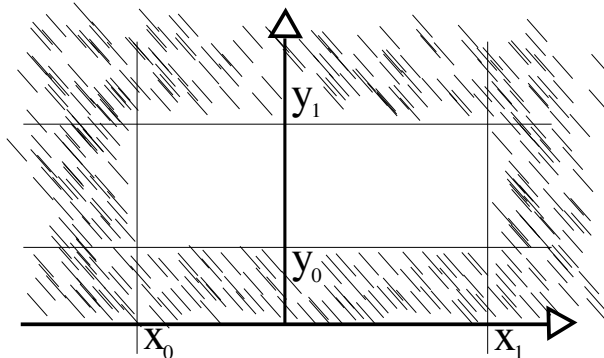


Abbildung 5: Nichtexistenzbereich von γ mithilfe der Länge von J

Dies ist allerdings ein Widerspruch zur Periodizität von u . □

7 Globale Eigenschaften einer Willmore-Fläche unter Axialsymmetrie

Dieser Paragraph dient dazu, die Nichtexistenzbereiche aus dem Beweis des Hauptsatzes 1.2 in Abschnitt 6.4 genauer auszuarbeiten, um so das qualitative Verhalten von möglichen Fortsetzungen einer Profilkurve zu diskutieren. Die Ergebnisse aus Abschnitt 6.2 und Satz 4.15 ermöglichen es dabei o.B.d.A. von folgendem speziellem Anfangswertproblem auszugehen (vergleiche mit dem Beweis von 6.11):

$$\begin{cases} \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = KN, \quad \nabla_{\dot{\gamma}}N = -K\dot{\gamma}, & K'' = K - \frac{1}{2}K^3 \\ \gamma(0) = (0, z), \quad \dot{\gamma}(0) = (z, 0), & K(0) = K_0, \quad K'(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{AWP})$$

Hierbei ist γ die gesuchte Profilkurve des axialsymmetrischen Willmore-Problems, K die geodätische Krümmung von γ , $z \in (0, \infty)$ ein Parameter für die Höhe des Anfangspunktes, K_0 die geodätische Krümmung in diesem Anfangspunkt und N die Normale an $\dot{\gamma}$ gemäß 3.6.

Ergebnisse aus dieser Untersuchung können außerdem direkt auf bestimmte Lösungen des folgenden Dirichlet-Problems angewandt werden, ohne dass eine Moebius-Transformation benötigt wird:

7.1 Satz (siehe Theorem 1.1 in [DFGS])

Sei $\alpha > 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann existiert eine glatte Profilkurve $u : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$, sodass die zugehörige axialsymmetrische Fläche $S(u)$ folgendes Dirichlet Problem löst:

$$\begin{cases} \Delta_{S(u)}H + 2H(H^2 - K) = 0, & \text{in } (-1, 1) \\ u(\pm 1) = \alpha, \quad u'(-1) = -u'(1) = \beta \end{cases}$$

Außerdem gilt für diese Lösung, dass $u(x) = u(-x) \quad \forall x \in [-1, 1]$.

Die Symmetrieeigenschaft von u in Kombination mit 3.7 sichert, dass man sich in der Situation von (AWP) befindet.

Um eine zusätzliche Idee für das qualitative Verhalten der Lösung γ von (AWP) zu erhalten, werden in den folgenden Abschnitten numerische Plots mithilfe eines in Maple(TM)² vorimplementierten Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahrens angefertigt. Dieses Verfahren beruht auf der Idee eine adaptive Schrittweitenkontrolle für ein Runge-Kutta-Verfahren zu erhalten, indem die benötigte Fehlerabschätzung durch ergänzen des Verfahrens zur nächsthöheren Ordnung berechnet wird. Vergleiche dazu [F].

Für die folgende Untersuchung sei J_γ das Vektorfeld entlang γ aus 6.4 und J das dazugehörige Killing-Vektorfeld. Sei weiterhin $T := \dot{\gamma}$ und N die dazugehörige Normale nach 3.6. Für J existieren dabei nach 5.8 Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass

$$J(x, y) = a \begin{pmatrix} \frac{x^2 - y^2}{2} \\ xy \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies impliziert mit (AWP) und $J(0, z)$ parallel zu $T(0)$, dass

$$0 = J^2(0, z) = bz \Rightarrow b = 0.$$

Die Unterteilung der Lösungen in die vier folgenden Klassen stammt aus [LS1] Tabelle 2.7 (c).

²Maple 12. Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., Waterloo, Ontario

7.1 Lösungen mit konstanter Krümmung

(KODE) besitzt nur drei konstante Lösungen und zwar $K = 0$ und $K = \pm\sqrt{2}$. Beide lassen sich mit den Ergebnissen aus Abschnitt 6.3 bearbeiten:

- $K = 0$: Dies sind entweder Halbkreise, sodass der Mittelpunkt auf der x -Achse liegt, oder Geraden, die senkrecht auf der x -Achse stehen:

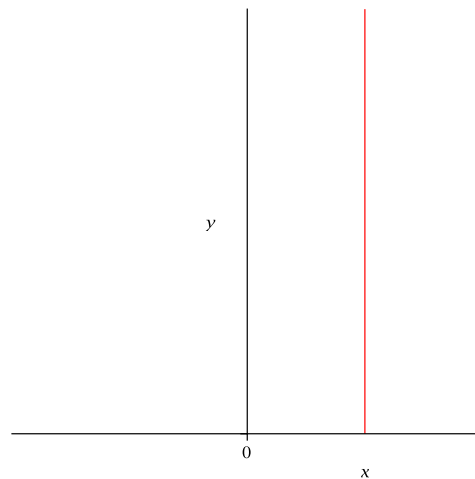


Abbildung 6: senkrechte Geodätische

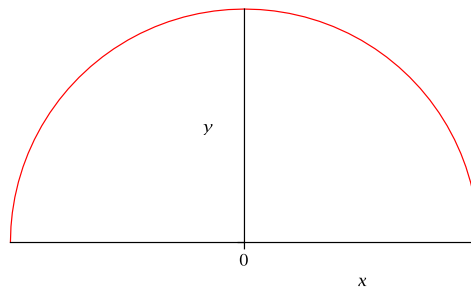


Abbildung 7: Halbkreisgeodätische

- $|K| = \sqrt{2}$: $\sqrt{2} > 1$, somit handelt es sich hier nach 6.10 um einen vollständig in \mathbb{H}^2 liegenden euklidischen Kreis, wobei das Verhältnis der y -Koordinate m des Mittelpunktes und des Radiuses r des Kreises $\sqrt{2} = \frac{m}{r}$ beträgt. Dabei handelt es sich um einen Teil des Clifford-Torus (vgl. [HJP]):

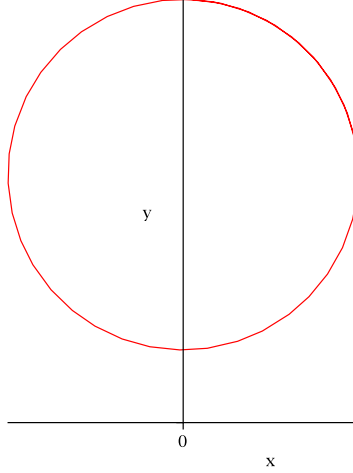


Abbildung 8: Profilkurve für Teil des Clifford-Torus

7.2 Wellenartige Lösungen

Dieser Abschnitt behandelt die Lösungen von (KODE), welche in 4.14 berechnet wurden. Hier gilt $|K_0| > 2$ und $|K_0|$ ist das Maximum von $|K|$. Nutzt man nun die Ungleichung

$$g(J_\gamma, J_\gamma) \stackrel{4.1}{=} g\left(K^2 T + 2 \frac{dK}{ds} N, K^2 T + 2 \frac{dK}{ds} N\right) = K^4 + 4 \left(\frac{dK}{ds}\right)^2 \quad (*)$$

$$4K^2 - 4K_0^2 + K_0^4 \leq K_0^4,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $K(s) = \pm K_0$, erkennt man mit 5.6, dass die Integralkurve c_J von J durch $\gamma(0)$ ein Kandidat für die Begrenzung des in Abschnitt 6.4 angesprochenen Nichtexistenzbereiches ist. Die Krümmung κ für diese Kurve beträgt nach 6.5

$$\kappa = \frac{2}{K_0} < 1.$$

Dies impliziert mit Bemerkung 6.12, dass zwei unterschiedliche Kurven für c_J in Frage kommen.

- (i) c_J ist ein Kreis, welcher die x -Achse an zwei Punkten schneidet: Seien $r > 0$ und $m \in \mathbb{R}$ zwei Parameter, die diesen Kreis mit der Parametrisierung aus 6.10 beschreiben. Dabei ist r der Radius und m die zweite Komponente des Mittelpunktes von c_J (die erste Komponente ist aus Symmetriegründen 0). Die folgenden Bilder behandeln dabei den Fall $K_0 < 0$, allerdings sind die Rechnungen invariant gegenüber dem Vorzeichen von K_0 :

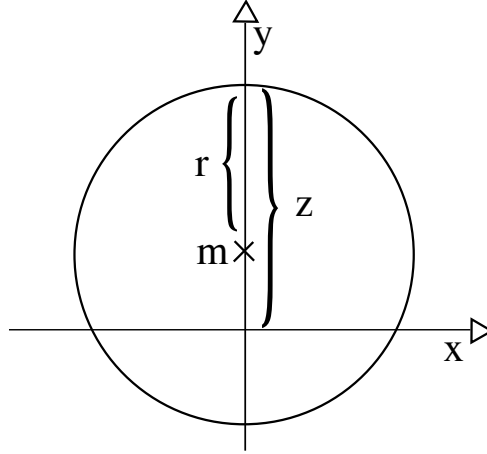


Abbildung 9: Erster Grenzkreis für wellenartige Lösungen bei $K_0 < 0$

Dies liefert mit 6.10 folgendes System von Gleichungen:

$$r + m = z, \quad -\frac{m}{r} = \kappa$$

woraus folgt

$$r = \frac{z}{1 - \kappa}, \quad m = -z \frac{\kappa}{1 - \kappa}.$$

Gleichheit kann in (*) auch mit $-K_0$ erreicht werden. Dazu gehört ebenfalls eine Integralkurve \tilde{c}_J . Diese besitzt die geodätische Krümmung

$$\tilde{\kappa} = -\frac{2}{K_0}.$$

Ein Anfangspunkt für diese Kurve ist allerdings nicht a priori bekannt, sodass zuerst eine weiterführende Analyse von J durchgeführt werden muss, um einen geeigneten Kandidaten für die Begrenzung von γ festzulegen. J ist auf der x -Achse parallel zur x -Achse, denn dort gilt $J^2(x, 0) = 0$. Für die erste Komponente gilt dort weiterhin $J^1(x, 0) = a\frac{x^2}{2} + c$. Da c_J diese Achse zweimal echt schneidet (also nicht tangiert), müssen zwei Nullstellen von J auf der x -Achse existieren und somit gilt auch $a, c \neq 0$. Mehr Nullstellen kann J außerdem auf dieser Achse nicht aufweisen, denn $J^1(x, 0)$ ist ein quadratisches Polynom. Dies zeigt, dass \tilde{c}_J ebenfalls ein Kreis sein muss, der aus Krümmungsgründen ebenfalls die x -Achse an denselben Punkten schneidet wie c_J . Für diese Punkte gilt mithilfe des Satzes von Pythagoras

$$\tilde{x} = \pm\sqrt{r^2 - m^2}, \quad \tilde{y} = 0.$$

Damit können die Parameter \tilde{r} und \tilde{m} von \tilde{c}_J berechnet werden, siehe dazu:

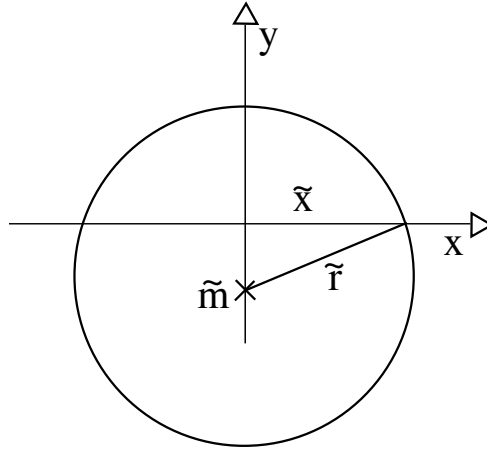


Abbildung 10: Zweiter Grenzkreis für wellenartige Lösungen bei $K_0 < 0$

Diese Skizze liefert damit folgendes System von Gleichungen:

$$\tilde{m}^2 + \tilde{x}^2 = \tilde{r}^2, \quad -\frac{\tilde{m}}{\tilde{r}} = \tilde{\kappa}.$$

Daraus folgt

$$\tilde{r} = \frac{|\tilde{x}|}{\sqrt{1 - \tilde{\kappa}^2}}, \quad \tilde{m} = -|\tilde{x}| \frac{\tilde{\kappa}}{\sqrt{1 - \tilde{\kappa}^2}}.$$

In der Tat begrenzen diese Kurven γ , denn das Verhalten der Länge von J bezüglich der hyperbolischen Metrik ist qualitativ wie folgt, da $a, c \neq 0$ (vergleiche dazu Paragraph 6.4 (+)):

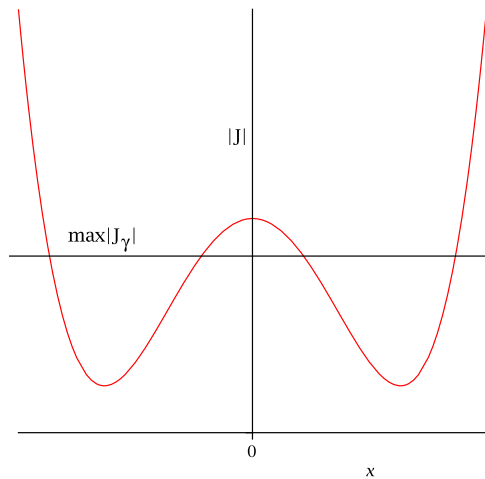


Abbildung 11: Verhalten der Länge von J in x -Richtung

Diese Skizze impliziert, dass der 'obere' Kreis (mit Mittelpunkt in \mathbb{H}^2) γ begrenzt, denn außerhalb dieses Kreises ist $|J|_g$ zu lang für (*).

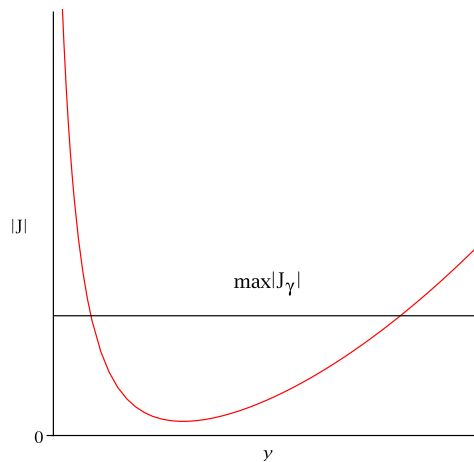


Abbildung 12: Verhalten der Länge von J in y -Richtung

Das Verhalten in y -Richtung bedeutet, dass der 'untere' Kreis (mit Mittelpunkt nicht in \mathbb{H}^2) γ begrenzt, denn nahe der x -Achse läuft $|J|_g$ gegen ∞ . Die einzige Ausnahme für dieses Verhalten sind die Nullstellen für J auf der x -Achse. Allerdings schneiden dort beide Kreise die Achse und somit ist dieser Fall ohne Bedeutung.

- (ii) Für den Fall, dass die Integralkurve c_J eine Gerade ist, muss diese wegen der Anfangsdaten von (AWP) parallel zur x -Achse sein. Dies impliziert allerdings nach 6.9, dass die Krümmung dieser Kurve 1 beträgt, womit $K_0 = 2$ ist. Dies ist allerdings ein Widerspruch zu $K_0 > 2$.

Zusammengefasst in einem Theorem bedeutet die obige Diskussion:

7.2 Satz

Sei γ Lösung des Anfangswertproblems (AWP), wobei die Krümmung von der Form 4.14 sein soll. Dann existieren zwei euklidische offene Kugeln $S(M_1, r_1) \subset \mathbb{R}^2$ und $S(M_2, r_2) \subset \mathbb{R}^2$, sodass für die Mittelpunkte gilt $M_1 \in \mathbb{H}^2$ und $M_2 \notin \mathbb{H}^2$. Außerdem schneiden sich die Ränder der Kugeln genau zweimal auf der x -Achse. Dann gilt für γ :

$$\gamma(\mathbb{R}) \subset \mathbb{H}^2 \cap \overline{S(M_1, r_1)} \cap (S(M_2, r_2))^c.$$

Mithilfe eines numerischen Plots, kann die obige Aussage mit einem Bild verdeutlicht werden. Mehr numerische Plots für diese Krümmungsfunktionen in der Nähe des Anfangspunktes $(0, z)$ befinden sich im Anhang 8.1.

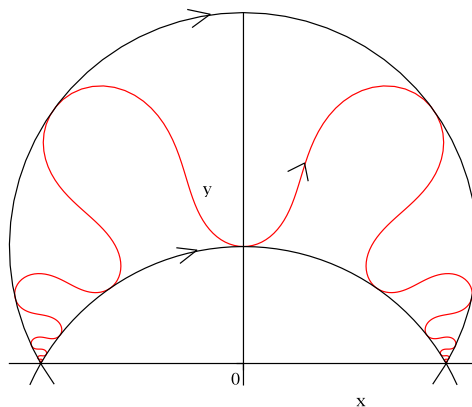


Abbildung 13: Globales Verhalten von γ bei $K_0 > 0$

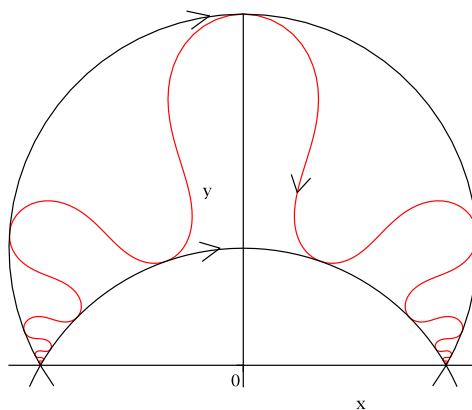


Abbildung 14: Globales Verhalten von γ bei $K_0 < 0$

7.3 Orbitale Lösungen

In diesem Abschnitt sei die geodätische Krümmung von γ vom Typ 4.13 und nicht konstant. Für diese Klasse von Lösungen gibt es zwei verschiedene extremale Möglichkeiten für K_0 . Sei also K_{max} und K_{min} so gewählt, dass sie das Supremum bzw. das Infimum von $|K|$ annehmen. Dies bedeutet, dass die Ungleichung (*) aus Paragraph 7.2 wie folgt modifiziert werden kann:

$$g(J_\gamma, J_\gamma) \begin{cases} \leq & K_{max}^4 \\ \geq & K_{min}^4 \end{cases} \quad (**)$$

Hierbei gilt Gleichheit genau dann, wenn $K(s) = K_{min}$ oder $K(s) = K_{max}$. Die Kandidaten für begrenzende Kurven sind wie in Abschnitt 7.2 Integralkurven von J . Die erste Integralkurve c_J erhält man durch betrachten des Startpunktes $\gamma(0)$, denn dort ist K extremal. Dies bedeutet, dass K_0 entweder K_{min} oder K_{max} ist. Weiterhin gilt mit 4.13, dass $|K_0| < 2$. Damit gilt für die Krümmung κ der Integralkurve c_J von J durch $\gamma(0)$ mit 6.5

$$\kappa = \frac{2}{K_0} > 1.$$

Dies impliziert mit 6.12, dass c_J ein euklidischer Kreis ist, welcher vollständig in der hyperbolischen Halbebene liegt. Aus Gründen der Symmetrie muss die erste Komponente des Mittelpunktes dieses Kreises 0 sein. Sei m die zweite Komponente und $r > 0$ der Radius des Kreises. Für das Folgende ist der Durchlaufsinnsinn und damit das Vorzeichen der Krümmung dieses Kreises entscheidend.

Sei also $K_0 < 0$. Dann ist nach 4.6 $K < 0$. Dies impliziert weiterhin mit $m > 0$, dass c_J durch dieselbe Laufrichtung wie in 6.10 parametrisiert wird. Damit gilt, dass $\gamma(0)$ der Nordpol von c_J ist. Analog zu Abschnitt 7.2 ergibt sich dann für Mittelpunkt und Radius

$$r = \frac{z}{1 - \kappa}, \quad m = -z \frac{\kappa}{1 - \kappa}.$$

Für positive Krümmungen muss die Durchlaufrichtung in 6.10 geändert werden. Formeln für diesen Fall können im Beweis von 6.11 nachgelesen werden. Sei also weiterhin K_0 für das Folgende negativ.

Auch hier gibt es einen weiteren Kreis \tilde{c}_J für die andere Wahlmöglichkeit von K_0 . Sei diese K_1 . Um diesen Kreis zu berechnen ist folgendes Lemma hilfreich, denn auch wie in Abschnitt 7.2 ist a priori kein Startpunkt für \tilde{c}_J auf γ bekannt. Man weiß nur, dass ein solcher Startpunkt existiert und dort γ parallel zu J ist.

7.3 Hilfssatz

Sei V ein Killing-Vektorfeld auf einer wegzusammenhängenden Riemannschen Fläche (M, g) , sodass ein $p_N \in M$ existiert mit $V(p_N) = 0$. Sei weiterhin $p \in M$ fixiert und c_V die Integralkurve von V , welche in p beginnt. Dann gilt für alle $p' \in c_V$

$$\text{dist}_g(p, p_N) = \text{dist}_g(p', p_N).$$

Beweis. Sei Θ_V der Fluss von V . Sei weiterhin $c : [0, 1] \rightarrow M$ eine Kurve mit $c(0) = p$ und $c(1) = p_N$. Sei außerdem $p' \in c_V$ fixiert und sei $t \in \mathbb{R}$ so, dass $\Theta_V(p, t) = p'$. Dann definiert man eine Kurve \tilde{c} , welche p' und p_N miteinander verbindet durch

$$\tilde{c}(s) = \Theta_V(c(s), t).$$

Damit gilt

$$\tilde{c}(0) = p', \quad \tilde{c}(1) = p_N,$$

denn $\Theta_V(p_N, \ell) = p_N$ für alle $\ell \in \mathbb{R}$, da $V(p_N) = 0$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} L_{[0,1]}(\tilde{c}) &= \int_0^1 \sqrt{g_{\tilde{c}(s)}(\dot{\tilde{c}}(s), \dot{\tilde{c}}(s))} ds \\ &= \int_0^1 \sqrt{g_{\Theta_V(c(s), t)}(d\Theta_V(c(s), t)\dot{c}(s), d\Theta_V(c(s), t)\dot{c}(s))} ds \\ &= \int_0^1 \sqrt{g_{c(s)}(\dot{c}(s), \dot{c}(s))} ds = L_{[0,1]}(c). \end{aligned}$$

□

Nun wird gezeigt, dass J eine Nullstelle in \mathbb{H}^2 besitzen muss. Wie eingangs von Paragraph 7 diskutiert, besitzt J folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} J^1(x, y) &= -\frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{2}ax^2 + c \\ J^2(x, y) &= axy \end{aligned}$$

Dies impliziert, dass J auf der y -Achse parallel zur x -Achse ist, denn dort gilt $J^2(0, y) = 0$. Außerdem folgt aus der Existenz des Kreises c_J , welcher die y -Achse zweimal schneidet und eine Integralkurve von J ist, dass ein Vorzeichenwechsel in $J^1(0, y)$ auf der y -Achse innerhalb der Kugel, welche von c_J berandet wird, vorliegt. Also existiert dort eine Nullstelle von J . Diese kann nur bei $y_N = \sqrt{-2\frac{c}{a}} > 0$ liegen und ist damit in \mathbb{H}^2 eindeutig, denn dies bedeutet auch, dass $a, c \neq 0$.

Diese Diskussion und Hilfssatz 7.2 implizieren, dass c_J und \tilde{c}_J ebenfalls Kreise bezüglich der hyperbolischen Metrik sind, welche denselben Mittelpunkt bezüglich dieses Abstandes besitzen. Außerdem gilt für diese Kreise, dass sie denselben Durchlaufsinne besitzen, da ihre Krümmungen dasselbe Vorzeichen besitzen.

Sei $(0, y_1)$ der Nordpol von c_J , also $y_1 = \max(c_J^2)$, und $(0, y_2)$ der Südpol von c_J , also $y_2 = \min(c_J^2)$. Sei weiterhin $G(t) := (0, t)$ eine Gerade, die den Südpol, den Mittelpunkt und den Nordpol von c_J schneidet. Diese ist nach 6.9 eine Geodätische, damit eine kürzeste Verbindung zwischen diesen Punkten. Sei weiterhin $(0, y_N)$ der Mittelpunkt von c_J bezüglich der hyperbolischen Metrik. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{dist}_g((0, y_1), (0, y_N)) &= \text{dist}_g((0, y_2), (0, y_N)) \\ \Rightarrow \int_{y_N}^{y_1} \sqrt{g(\dot{G}(s), \dot{G}(s))} ds &= \int_{y_2}^{y_N} \sqrt{g(\dot{G}(s), \dot{G}(s))} ds \\ \Rightarrow \int_{y_N}^{y_1} \frac{1}{s} ds &= \int_{y_2}^{y_N} \frac{1}{s} ds \\ \Rightarrow \ln(y_1) - \ln(y_N) &= \ln(y_N) - \ln(y_2) \\ \Rightarrow y_N &= \sqrt{y_1 y_2}. \end{aligned}$$

Sei nun analog $(0, \tilde{y}_1)$ der Nordpol und $(0, \tilde{y}_2)$ der Südpol von \tilde{c}_J . Sei weiterhin \tilde{r} der euklidische Radius und $(0, \tilde{m})$ der euklidische Mittelpunkt von \tilde{c}_J . Außerdem sei $\tilde{\kappa} = \frac{2}{\tilde{K}_1}$

die Krümmung von \tilde{c}_J . Dann gilt folgendes System von Gleichungen

$$\begin{aligned} y_N &= \sqrt{\tilde{y}_1 \tilde{y}_2} \\ \tilde{y}_1 - \tilde{r} &= \tilde{m} \\ \tilde{y}_2 + \tilde{r} &= \tilde{m} \\ -\frac{\tilde{m}}{\tilde{r}} &= \tilde{\kappa}. \end{aligned}$$

Dieses System ist nur gültig für $K < 0$. Liegt der Fall $K > 0$ vor, muss die vierte Gleichung durch $\frac{\tilde{m}}{\tilde{r}} = \tilde{\kappa}$ ersetzt werden, da sich dann der Umlaufsinn dieser Kurve ändert. Danach muss analog weitergerechnet werden.

Eliminiert man nun \tilde{m} , erhält man

$$\begin{aligned} y_N &= \sqrt{\tilde{y}_1 \tilde{y}_2} \\ \tilde{y}_1 &= -\tilde{\kappa} \tilde{r} + \tilde{r} \\ \tilde{y}_2 &= -\tilde{\kappa} \tilde{r} - \tilde{r}. \end{aligned}$$

Dies ergibt dann

$$\begin{aligned} y_N &= \sqrt{-\tilde{r}^2(1 - \tilde{\kappa})(1 + \tilde{\kappa})} = \tilde{r} \sqrt{\tilde{\kappa}^2 - 1} \\ \Leftrightarrow \tilde{r} &= \frac{y_N}{\sqrt{\tilde{\kappa}^2 - 1}} \\ \Rightarrow \tilde{m} &= -\tilde{\kappa} \frac{y_N}{\sqrt{\tilde{\kappa}^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Für $K > 0$ gilt dieselbe Formel für r . Für den Mittelpunkt muss lediglich das Vorzeichen geändert werden.

Um zu überprüfen, dass die angegebenen Kreise wirklich den Nichtexistenzbereich von γ begrenzen, wird analog zum vorherigen Abschnitt 7.2 das qualitative Verhalten der Länge von J untersucht:

$$|J|_g^2(x, y) = \frac{\left(-\frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{2}ax^2 + c\right)^2 + (axy)^2}{y^2}.$$

In y -Richtung bedeutet dies mit $a, c \neq 0$ qualitativ:

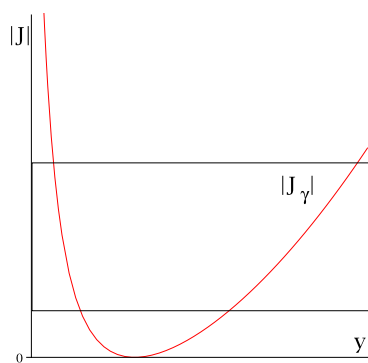


Abbildung 15: Qualitatives Verhalten von $|J|_g$ in y -Richtung

Aufgrund der Monotonieeigenschaften begrenzen also beide Kreise die Lösung γ . Zusammengefasst bedeutet dies:

7.4 Satz

Sei γ eine Lösung von (AWP), sodass die geodätische Krümmung von der Form wie in Satz 4.13 ist. Dann existieren zwei offene euklidische Kugeln $S(M_1, r_1) \subset S(M_2, r_2) \subset \mathbb{H}^2$ mit der Eigenschaft, dass

$$\gamma(\mathbb{R}) \subset \overline{S(M_2, r_2)} \setminus S(M_1, r_1).$$

Mithilfe der eingangs besprochenen Numerik können qualitative Eigenschaften der Lösung, sowie der obige Satz verdeutlicht werden.

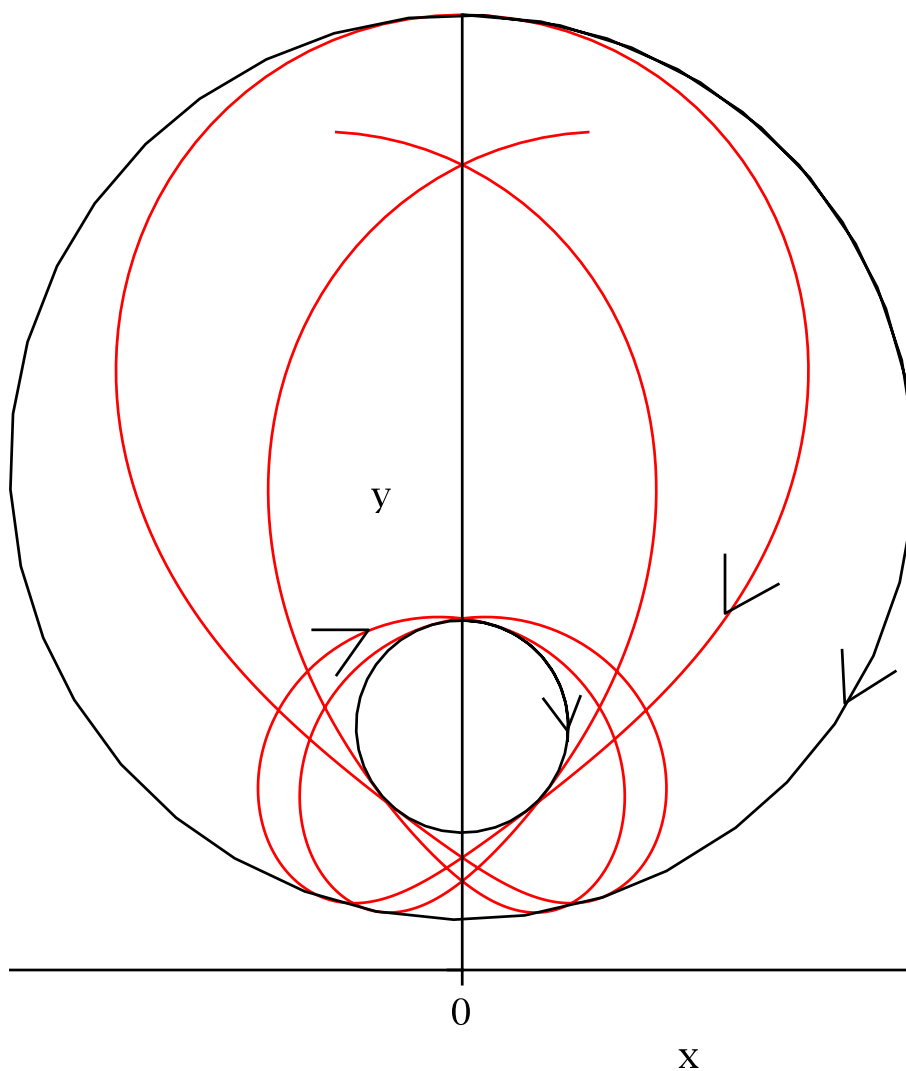


Abbildung 16: Globales Verhalten von γ bei $K_0 \in (-\sqrt{2}, -2)$

Im Anhang 8.2 befinden sich weitere Plots mit variierten Krümmungen.

7.4 Asymptotisch geodätische Lösung

In diesem Paragraphen werden Lösungen γ von (AWP) untersucht, deren geodätische Krümmung von der Form wie in 4.4 sind. Damit gilt $K(t) = \pm \frac{2}{\cosh t}$. Dies ist die einzige nicht-periodische Lösung von (KODE). Zuerst betrachtet man den positiven Fall. Dabei handelt es sich um das Katenoid.

7.5 Satz (vergleiche [DG] Figure 1)

Sei γ eine Lösung von (AWP) mit Krümmung $K = \frac{2}{\cosh t}$. Dann gilt

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} zt \\ z \cosh t \end{pmatrix}.$$

Beweis. Zuerst werden die Ableitungen von γ berechnet:

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} z \\ z \sinh t \end{pmatrix}, \quad \ddot{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \cosh t \end{pmatrix}.$$

Weiterhin gilt, dass γ nach der Bogenlänge parametrisiert ist, denn

$$|\dot{\gamma}|_g^2 = \frac{z^2 + z^2 \sinh^2 t}{z^2 \cosh^2 t} = 1.$$

Damit berechnet sich die Normale N nach 3.6 zu

$$N(t) = \begin{pmatrix} -z \sinh t \\ z \end{pmatrix}.$$

Nun kann mithilfe von Hilfssatz 3.6 die Krümmung κ von γ berechnet werden:

$$\begin{aligned} \kappa &= g(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, N) \\ &= \frac{\left(\ddot{\gamma}^1 - 2 \frac{\dot{\gamma}^1 \dot{\gamma}^2}{\gamma^2} \right) N^1 + \left(\ddot{\gamma}^2 - \frac{(\dot{\gamma}^2)^2}{\gamma^2} + \frac{(\dot{\gamma}^1)^2}{\gamma^2} \right) N^2}{(\gamma^2)^2} \\ &= \frac{2z^2 \frac{\sinh^2 t}{\cosh t} + z^2 \cosh t - z^2 \frac{\sinh^2 t}{\cosh t} + z^2 \frac{1}{\cosh t}}{z^2 \cosh^2 t} \\ &= \frac{2 \sinh^2 t + \cosh^2 t - \sinh^2 t + 1}{\cosh^3 t} = \frac{2}{\cosh t}. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Aussage folgt somit aus 2.27. □

Um das globale Verhalten von γ noch zu klären, hier ein Plot für diesen Fall:

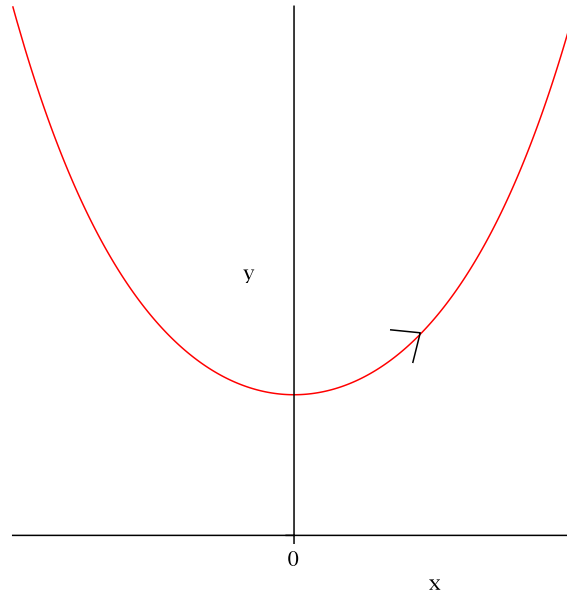


Abbildung 17: Globales Verhalten von γ bei $K_0 = 2$

Der Fall $K(t) = -\frac{2}{\cosh(t)}$ kann ebenfalls exakt gelöst werden. Dafür wird die Lösung aus 7.5 einer Inversion unterworfen.

7.6 Satz

Sei γ eine Lösung von (AWP) mit $K(t) = -\frac{2}{\cosh(t)}$, dann gilt

$$\gamma(t) = \frac{z}{t^2 + \cosh^2 t} \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix}.$$

Beweis. Sei γ_1 die Lösung von (AWP) mit $K(t) = \frac{2}{\cosh(t)}$ aus 7.5. Sei weiterhin

$$\phi(x, y) := \frac{z^2}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

die Inversion am Kreis, dessen Mittelpunkt der Ursprung und dessen Radius z ist. Dann gilt

$$\phi(\gamma_1(t)) = \frac{z^2}{z^2 t^2 + z^2 \cosh^2 t} \begin{pmatrix} z t \\ z \cosh t \end{pmatrix} = \gamma(t).$$

Dies zeigt mit 6.6 und 6.8, dass γ geodätische Krümmung $-\frac{2}{\cosh t}$ besitzt, denn ϕ ist orientierungsumkehrend und erhält die geodätische Krümmung im Betrag. Nun müssen noch die Anfangsbedingungen überprüft werden:

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung von γ berechnet sich zu

$$\dot{\gamma}(t) = -z \frac{2t + 2 \sinh t \cosh t}{(t^2 + \cosh^2 t)^2} \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix} + \frac{z}{t^2 + \cosh^2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\dot{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

Zum Abschluss wird noch ein Plot für diese Lösung gegeben:

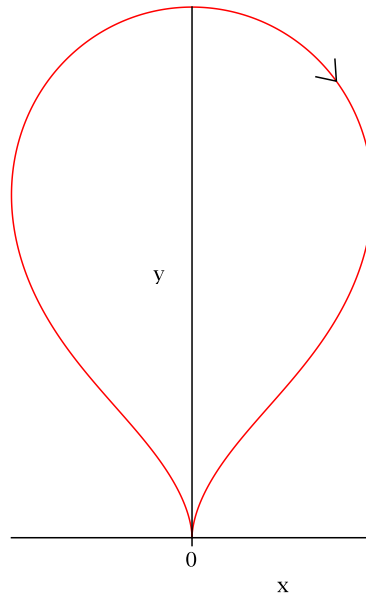


Abbildung 18: Globales Verhalten von γ bei $K_0 = -2$

8 Anhang

Der Anhang dient dazu, einige Plots des Anfangswertproblem (AWP) zu zeigen. Diese Plots wurden dabei mit der eingangs von Paragraph 7 besprochenen Numerik angefertigt. Außerdem werden einige Beispiele kurz mit numerischen Lösungen des Dirichlet-Problems aus 7.1 verglichen, welche aus [DSGL] stammen. Dabei steht in der Bildunterschrift α für die Höhe des Dirichletdatums und β für die Ableitung an diesen Stellen.

8.1 Plots wellenartiger Lösungen

In diesem Abschnitt markieren die durchgezogenen Linien der Plots von γ Bereiche positiver geodätischer Krümmung und gepunktete Linien Bereiche negativer geodätischer Krümmung.

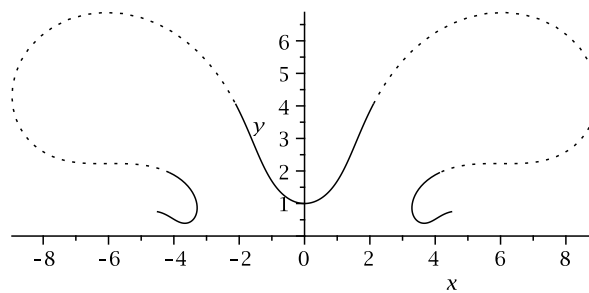


Abbildung 19: Plot von γ für $K_0 = 2.2$

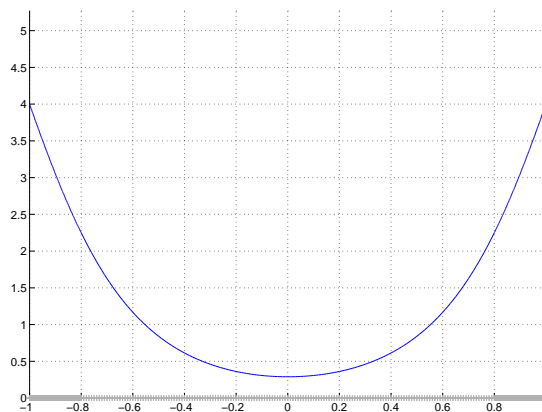


Abbildung 20: $\alpha = 4$, $\beta = -10$, siehe [DSGL]

Die beiden oberen Bilder legen nahe, dass (AWP) bei negativem K_0 hier ein Dirichlet-
 randdatum erfüllt, bei dem die Ableitung am linken Rande negativ und im Betrag groß
 ist.

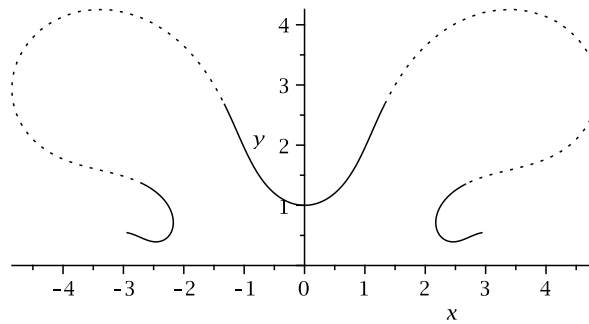


Abbildung 21: Plot von γ für $K_0 = 2.5$

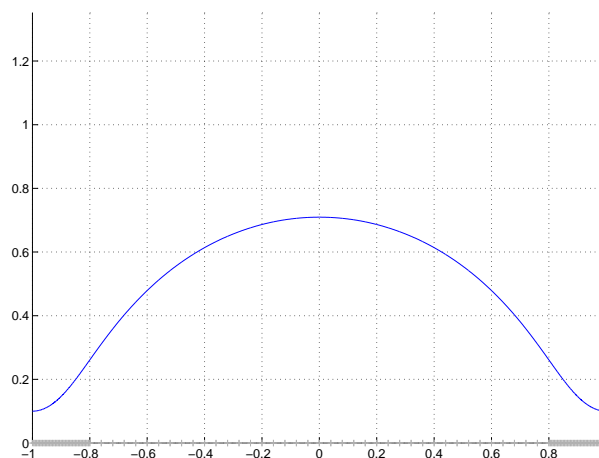


Abbildung 22: $\alpha = 0.1$, $\beta = 0$, siehe [DSGL]

Diese beiden Bilder legen die Vermutung nahe, dass das Dirichlet-Problem nicht eindeutig
 lösbar ist. Die Lösung (AWP) erreicht hier anscheinend jeweils zwei Punkte von der Mitte
 aus gesehen, an denen die Kurve parallel zur x -Achse wird, ohne vorher parallel zur y -
 Achse gewesen zu sein.

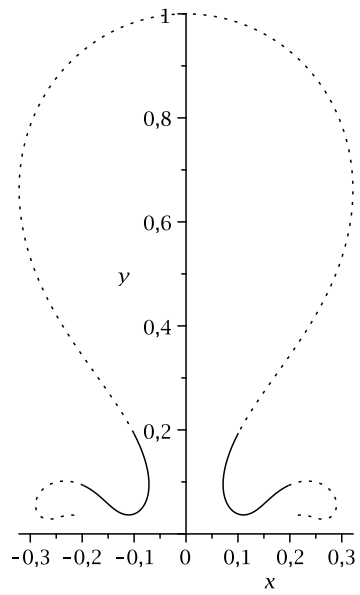


Abbildung 23: Plot von γ für $K_0 = -2.2$

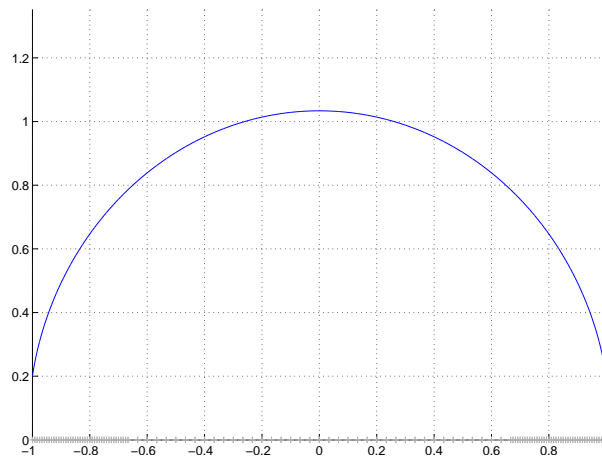


Abbildung 24: $\alpha = 0.2$, $\beta = 6$, siehe [DSGL]

Die beiden oberen Bilder lassen vermuten, dass (AWP) bei negativem K_0 Dirichlet-Probleme mit großem β löst.

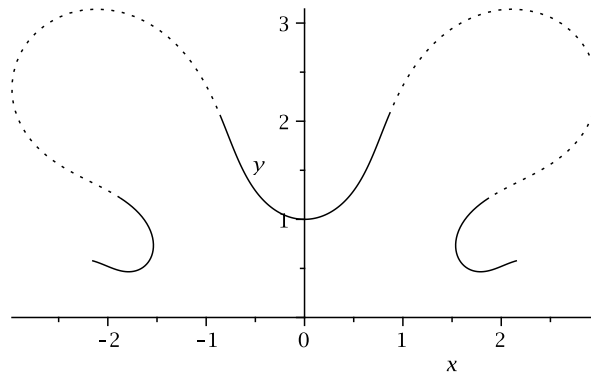


Abbildung 25: Plot von γ für $K_0 = 3$

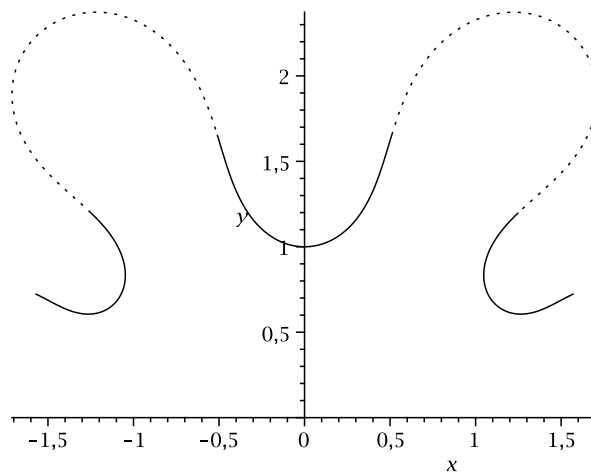


Abbildung 26: Plot von γ für $K_0 = 4$

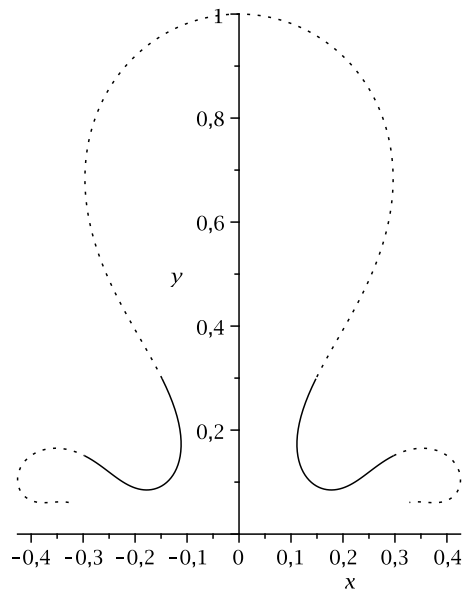


Abbildung 27: Plot von γ für $K_0 = -2.5$

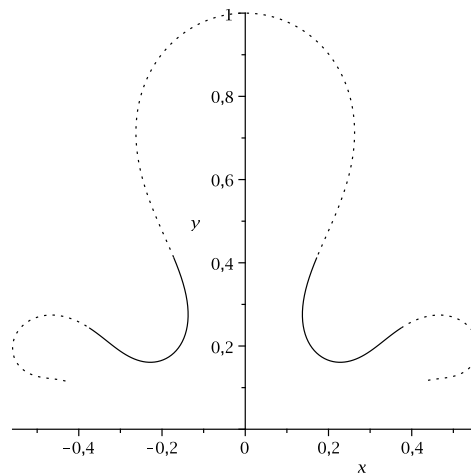


Abbildung 28: Plot von γ für $K_0 = -3$

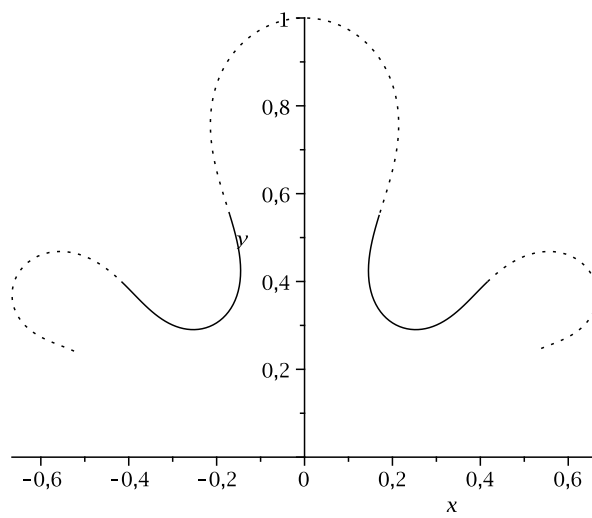


Abbildung 29: Plot von γ für $K_0 = -4$

8.2 Plots orbitaler Lösungen

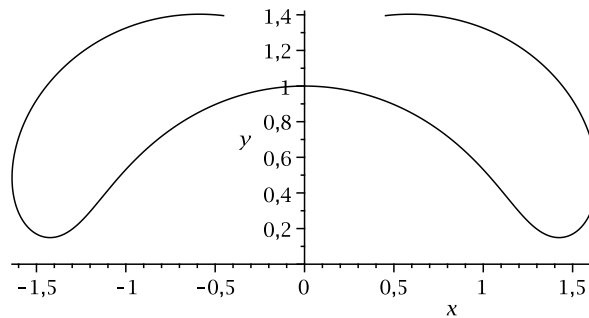


Abbildung 30: Plot von γ für $K_0 = 0.2$

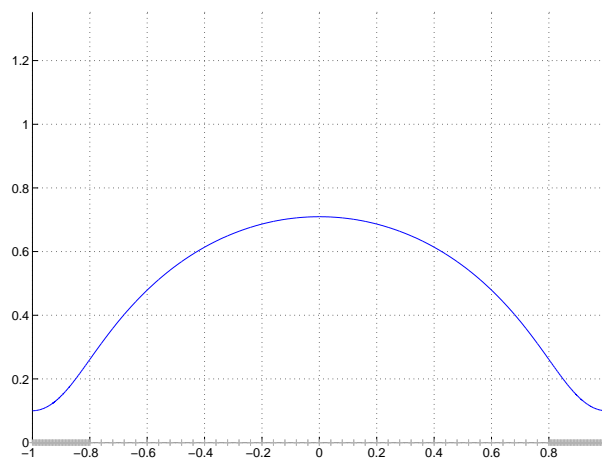


Abbildung 31: $\alpha = 0.1$, $\beta = 0$, siehe [DSGL]

Diesen beiden Bilder lassen vermuten, dass diese orbitale Kurve ein Kandidat als Lösung für ein Dirichlet-Problem bei trivialer Ableitung am Rand ist.

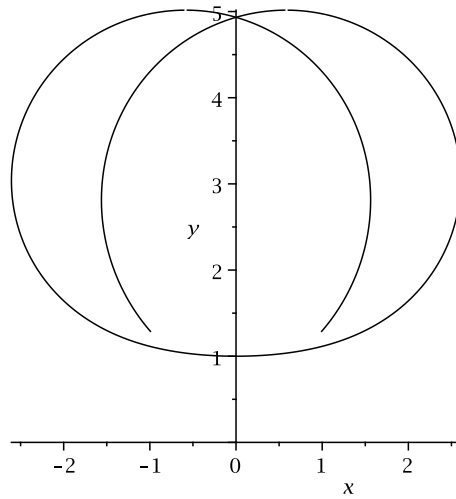


Abbildung 32: Plot von γ für $K_0 = 1.2$

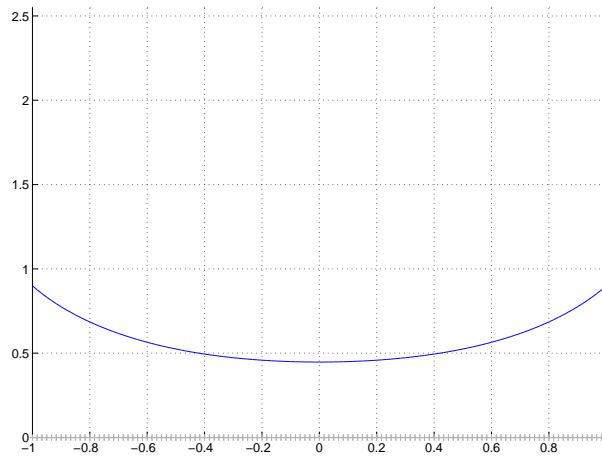


Abbildung 33: $\alpha = 0.9$, $\beta = -1.5$, siehe [DSGL]

Dies lässt vermuten, dass Kurven mit Krümmungen K_0 nahe $\sqrt{2}$ als Lösungen für das Dirichlet-Problem mit Randableitung zwischen -1 und -2 in Frage kommen.

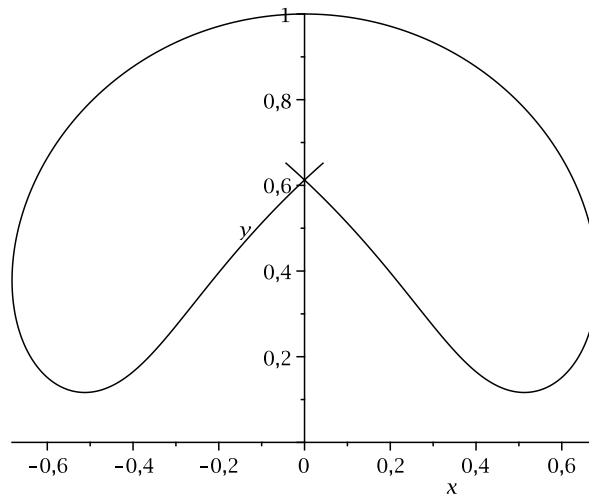


Abbildung 34: Plot von γ für $K_0 = -0.4$

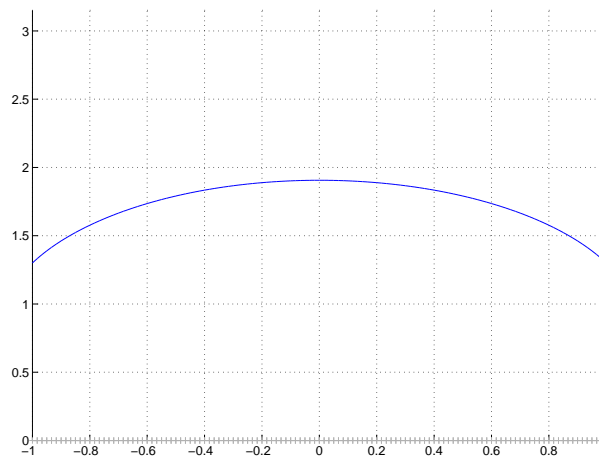


Abbildung 35: $\alpha = 1.3$, $\beta = 2$, siehe [DSGL]

Die beiden oberen Bilder legen die Vermutung nahe, dass im Betrag kleine, negative K_0 Lösungen für das Dirichlet-Problem liefern, bei denen die Ableitung am Rande bei ungefähr 2 liegt.

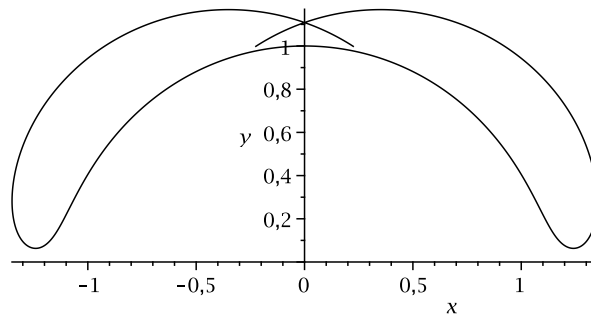


Abbildung 36: Plot von γ für $K_0 = 0.1$

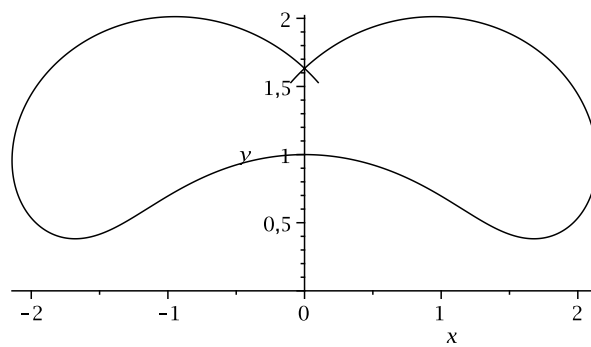


Abbildung 37: Plot von γ für $K_0 = 0.4$

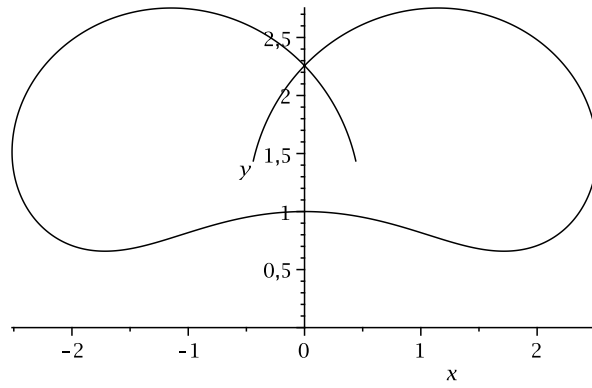


Abbildung 38: Plot von γ für $K_0 = 0.6$

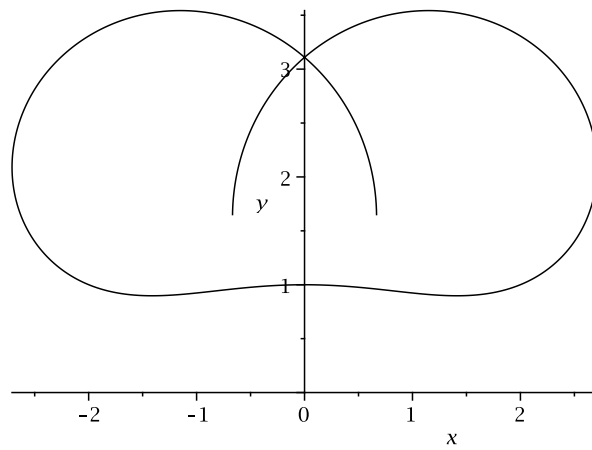


Abbildung 39: Plot von γ für $K_0 = 0.8$

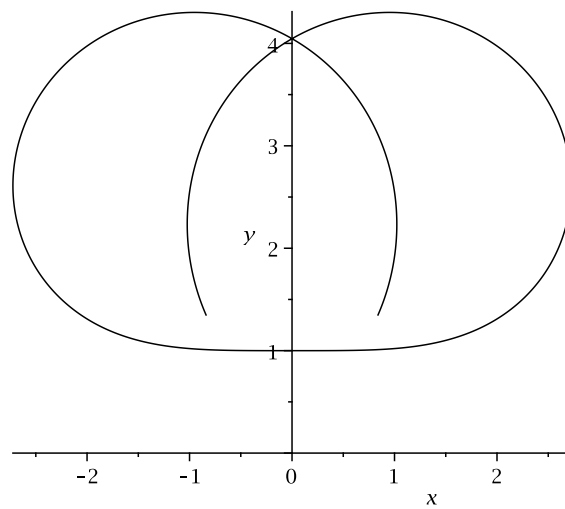


Abbildung 40: Plot von γ für $K_0 = 1$

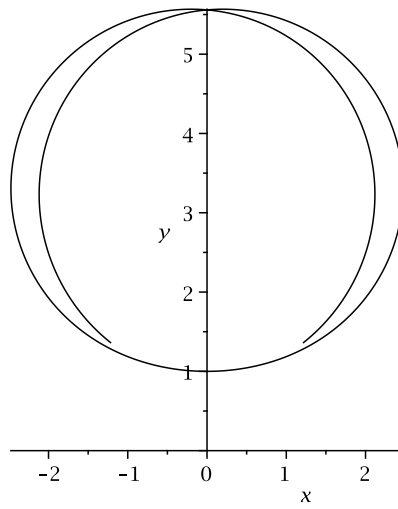


Abbildung 41: Plot von γ für $K_0 = 1.35$

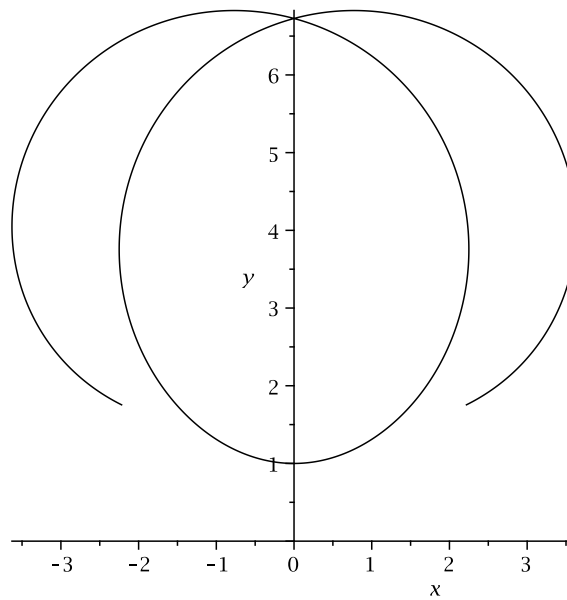


Abbildung 42: Plot von γ für $K_0 = 1.6$

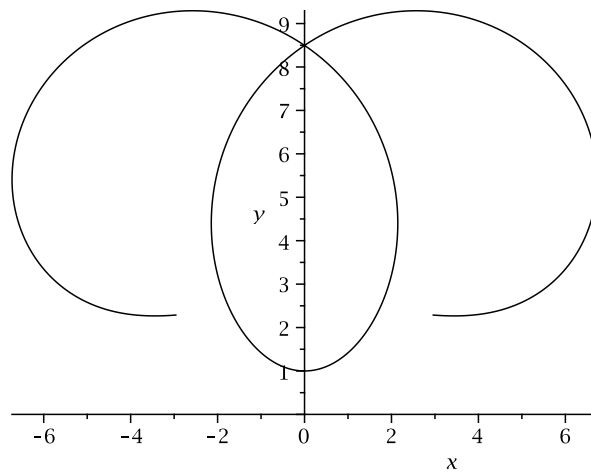


Abbildung 43: Plot von γ für $K_0 = 1.8$

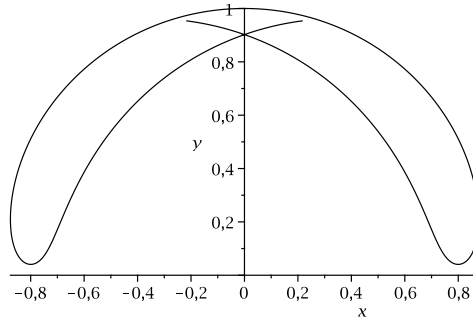


Abbildung 44: Plot von γ für $K_0 = -0.1$

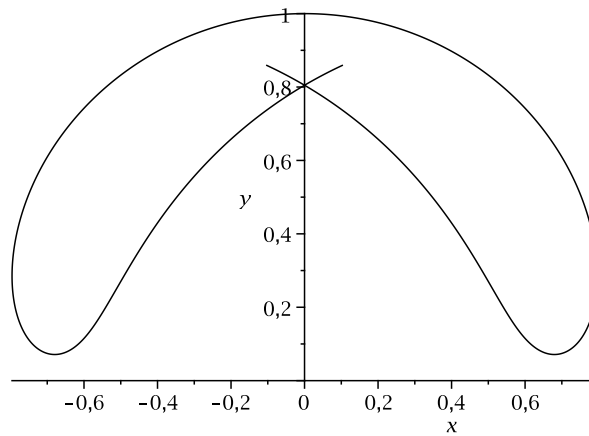


Abbildung 45: Plot von γ für $K_0 = -0.2$

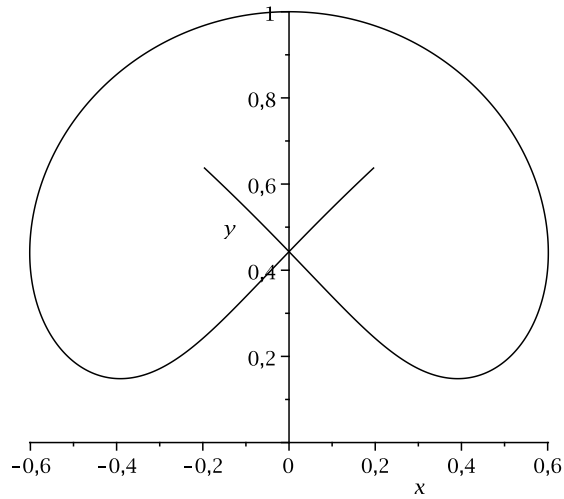


Abbildung 46: Plot von γ für $K_0 = -0.6$

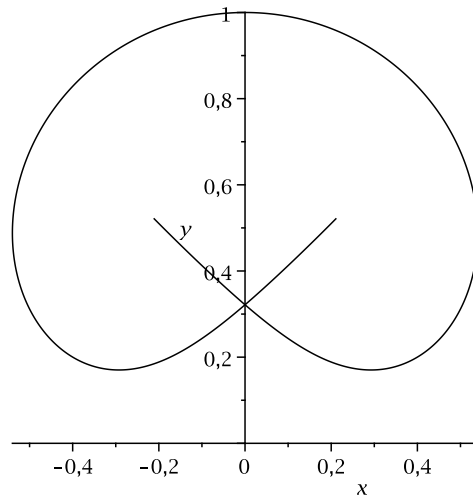


Abbildung 47: Plot von γ für $K_0 = -0.8$

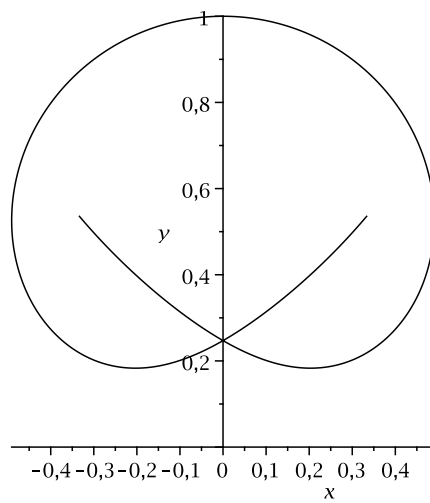


Abbildung 48: Plot von γ für $K_0 = -1$

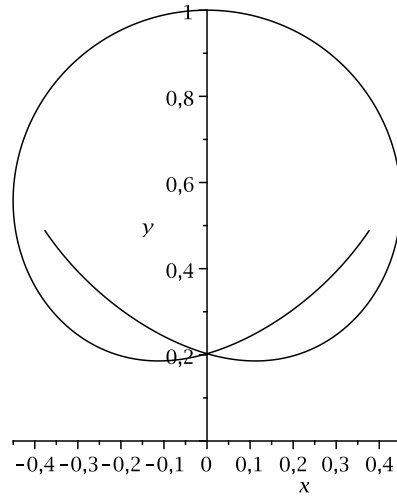


Abbildung 49: Plot von γ für $K_0 = -1.2$

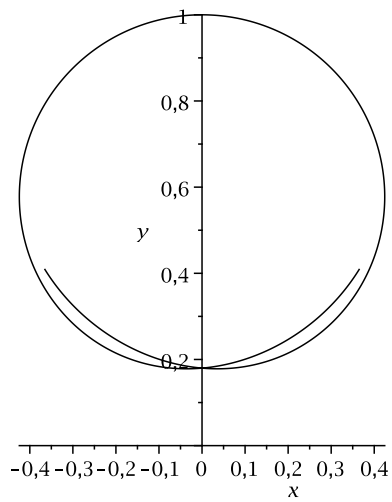


Abbildung 50: Plot von γ für $K_0 = -1.35$

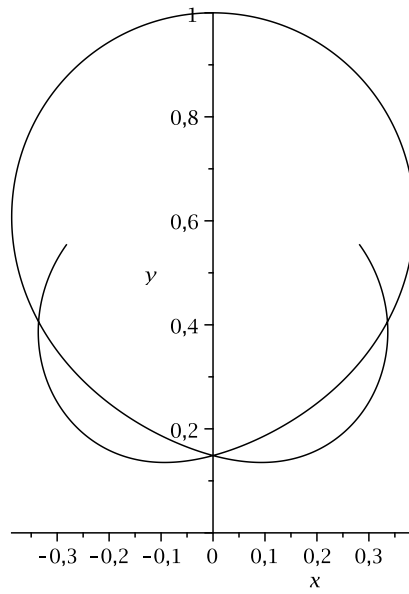


Abbildung 51: Plot von γ für $K_0 = -1.6$

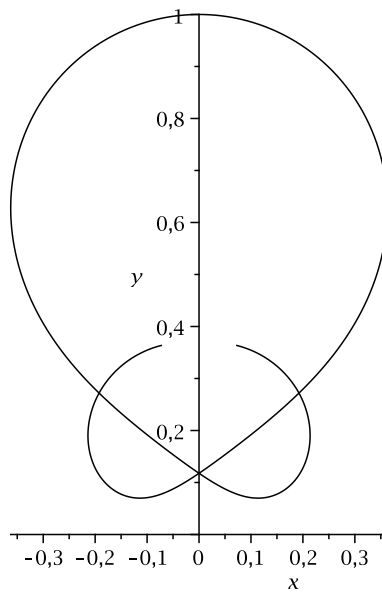


Abbildung 52: Plot von γ für $K_0 = -1.8$

Literatur

- [AS] M. Abramowitz, I.A. Stegun; *Handbook of mathematical functions*, Washington, D.C.: United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, 10. Auflage, U.S. Government Printing Office Washington, D.C. 20402 (1972).
- [B] C. Bär; *Elementare Differentialgeometrie*, 2. Auflage, De Gruyter Verlag Berlin 2010.
- [BDF1] M. Bergner, A. Dall'Acqua, S. Fröhlich; *Symmetric Willmore Surfaces of revolution satisfying natural boundary conditions*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations 39 (2010), 553-576.
- [BDF2] M. Bergner, A. Dall'Acqua, S. Fröhlich; *Willmore Surfaces of revolution with two prescribed boundary circles*, Journal of Geometric Analysis 23 (2013), 283-302.
- [Bo] J.P. Bowman; *612 Class Lecture: Hyperbolic Geometry* <http://www.math.cornell.edu/~bowman/metrics.pdf>, Abfragedatum 21.09.2013.
- [DDG] A. Dall'Acqua, K. Deckelnick, H.-Ch. Grunau; *Classical Solutions to the Dirichlet problem for Willmore surfaces of revolution*, Adv. Calc. Var. 1 (2008), 379-397.
- [DFGS] A. Dall'Acqua, S. Fröhlich, H.-Ch. Grunau, F. Schieweck; *Symmetric Willmore surfaces of revolution satisfying arbitrary Dirichlet boundary data*, Adv. Calc. Var. 4 (2011), 1-81.
- [DG] K. Deckelnick, H.-Ch. Grunau; *A Navier boundary value problem for Willmore surfaces of revolution*, Preprint Nr. 2, Otto-von-Guericke-Universität, Fakultät für Mathematik, 2009. Erschienen in Analysis (München), 29:229-258, 2009.
- [DSGL] K. Deckelnick, H.-Ch. Grunau, F. Schieweck, S. Lenor; *Symmetric Willmore surfaces of revolution. A set of numerical solutions for chosen Dirichlet boundary conditions* <http://www-ian.math.uni-magdeburg.de/~lenor/>, Abfragedatum 30.09.2013.
- [DR] M. Droske, M. Rumpf; *A level set formulation for Willmore flow* Interfaces Free Bound. 6, (2004) 361-378.
- [E] J.-H. Eschenburg; *Willmore surfaces and Moebius geometry*, Manuskript <http://www.math.uni-augsburg.de/~eschenbu/willmore.pdf>, Abfragedatum 20.08.2013.
- [F] E. Fehlberg; *Klassische Runge-Kutta-Formeln vierter und niedrigerer Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle und ihre Anwendung auf Wärmeleitungsprobleme*, Computing, vol. 6, Springer Verlag Wien (1970), 61-71.
- [H] W. Helfrich; *Elastic properties of lipid bilayers: Theory and possible experiments*, Z. Naturforsch. C 28 (1973), 693-703.
- [HJP] U. Hertrich-Jeromin, U. Pinkall; *Ein Beweis der Willmoreschen Vermutung für Kanaltori*, J. Reine Angew. Math. 430 (1992), 21-34.

- [J] J. Jost; *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, 1. Auflage, Springer Verlag Berlin 1995.
- [LS1] J. Langer, D. Singer; *The total squared curvature of closed curves*, J. Differ. Geom. 20 (1984), 1-22.
- [LS2] J. Langer, D. Singer; *Curves in the hyperbolic plane and mean curvature of tori in 3-space*, Bull. London Math. Soc. 16 (1984), 531-534.
- [L] J. M. Lee; *Introduction to Smooth Manifolds*, 2. Auflage, Springer Verlag New York, 2012.
- [N] J.C.C. Nitsche; *Boundary value problems for variational integrals involving surface curvatures*, Quart. Appl. Math. 51 (1993), 363-387.
- [OY] Z. Ou-Yang; *Elasticity theory of biomembranes*, Thin Solid Films 393 (2001), 19-23.
- [R] J.G. Ratcliffe; *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, 1. Auflage, Springer Verlag New York (1994).
- [S] R. Schätzle; *The Willmore boundary problem* Calculus of Variations and Partial Differential Equations 37 (2010), 275-300.
- [T] G. Thomsen; *Über Konforme Geometrie, I: Grundlagen der konformen Flächentheorie*, Hamb. Math. Abh. 3 (1923), 31-56.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Ort, Datum, Unterschrift